NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

R. MALLOIZEL

Problème proposé au concours général dans la classe de rhétorique (sciences, année 1863)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 2 (1863), p. 515-519

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__515_0>

PROBLÈME PROPOSÉ AU CONCOURS GÉNÉRAL DANS LA CLASSE DE RHÉTORIQUE (SCIENCES, ANNÉE 1863);

SOLUTION DE M. R. MALLOIZEL,
Élève du lycée Louis-le-Grand (*).

ENONCÉ. — *Dans un triangle* ABC, *où le rayon du cercle circonscrit est égal à l'unité, on mène les bissectrices des suppléments des angles; on forme ainsi un deuxième triangle* A′B′C′ (*le sommet* A′ *se trouvant dans l'angle* A, *etc*). *On donne le rapport* λ *du côté* AB *à la somme des deux autres* BC *et* AC; *le rapport* μ *du côté* A′B′ *à la somme des deux autres* B′C′ *et* A′C′. *On demande de résoudre le triangle* ABC, *et de trouver les conditions de possibilité du problème.*

Appelons A, B, C; a, b, c les angles et les côtés du premier triangle; A′, B′, C′; a', b', c' les angles et les côtés du second.

L'énoncé nous donne les relations

$$\frac{c}{a+b}=\lambda, \quad \frac{c'}{a'+b'}=\mu.$$

1° Calculons les angles A, B, C.

On a, dans le triangle ABC,

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},$$

d'où

$$\frac{c}{a+b}=\frac{\sin C}{\sin A+\sin B}=\lambda,$$

(*) M. R. Malloizel a obtenu le premier prix au Concours.

ou

$$\frac{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}=\lambda,$$

ou

$$(1)\qquad \frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}=\lambda.$$

Nous avons ainsi une première équation entre les angles $\frac{C}{2}$ et $\frac{A-B}{2}\cdot$ Cherchons-en une seconde.

Nous aurons dans le triangle $A'B'C'$, comme dans le triangle ABC, l'équation

$$\frac{c'}{a'+b'}=\frac{\sin\frac{C'}{2}}{\cos\frac{A'-B'}{2}}=\mu.$$

Or, on reconnaît facilement sur la figure, en menant les bissectrices des trois angles A, B, C, les relations :

$$C'=\frac{A+B}{2},\quad B'=\frac{A+C}{2},\quad A'=\frac{B+C}{2}.$$

Notre dernière égalité devient donc

$$\frac{\sin\frac{A+B}{4}}{\cos\frac{A-B}{4}}=\mu.$$

On sait que

$$\sin\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}},\quad \cos\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}.$$

Appliquant ces formules, il vient

$$\frac{\sqrt{\dfrac{1-\cos\dfrac{A+B}{2}}{2}}}{\sqrt{\dfrac{1+\cos\dfrac{A-B}{2}}{2}}}=\mu,$$

ou

$$(2)\qquad \frac{1-\sin\dfrac{C}{2}}{1+\cos\dfrac{A-B}{2}}=\mu^2.$$

Reste donc à résoudre les deux équations (1) et (2) du premier degré en $\sin\frac{C}{2}$ et $\cos\frac{A-B}{2}$:

$$\frac{\sin\dfrac{C}{2}}{\cos\dfrac{A-B}{2}}=\lambda,\qquad \frac{1-\sin\dfrac{C}{2}}{1+\cos\dfrac{A-B}{2}}=\mu^2,$$

ou

$$\sin\frac{C}{2}=\lambda\cos\frac{A-B}{2},$$

$$1-\sin\frac{C}{2}=\mu^2+\mu^2\cos\frac{A-B}{2}.$$

Remplaçons dans la seconde équation $\sin\frac{C}{2}$ par $\lambda\cos\frac{A-B}{2}$ il viendra

$$1-\lambda\cos\frac{A-B}{2}=\mu^2+\mu^2\cos\frac{A-B}{2},$$

ou

$$\cos\frac{A-B}{2}=\frac{1-\mu^2}{\lambda+\mu^2}.$$

(λ et μ étant des nombres donnés, cette expression sera facilement calculable par logarithmes.)

Nous pourrons alors calculer $\frac{A-B}{2}$, par suite $\frac{C}{2}$, et enfin les trois angles A, B, C.

2° Passons au calcul des côtés.

On a les relations

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2,$$

le rayon du cercle circonscrit étant égal à l'unité; d'où l'on tire

$$a=2\sin A,$$
$$b=2\sin B,$$
$$c=2\sin C.$$

Les angles A, B, C ayant été calculés, nous aurons les valeurs des trois côtés a, b, c.

3° *Discussion.*

La valeur de $\cos\frac{A-B}{2}$ doit être positive et plus petite que l'unité, c'est-à-dire qu'on doit avoir

$$\frac{1-\mu^2}{\lambda+\mu^2}>0 \qquad \text{ou} \qquad \mu<1,$$

et

$$1-\mu^2<\lambda+\mu^2 \quad \text{ou} \quad 2\mu^2>1-\lambda.$$

On a

$$\sin\frac{C}{2}=\lambda\cos\frac{A-B}{2},$$

et

$$\cos\frac{A-B}{2}>\cos\frac{A+B}{2},$$

ou

$$\cos\frac{A-B}{2}>\sin\frac{C}{2};$$

donc il faut qu'on ait

$$\lambda<1.$$

Les trois conditions de la possibilité du problème sont donc

$$\lambda < 1,$$
$$\mu < 1,$$
$$\mu > \sqrt{\frac{1-\lambda}{2}}.$$

Les deux premières conditions étaient évidentes *à priori*.

Le problème, quand ces conditions sont remplies, n'admet qu'une solution.

Comme cas limite, $\mu = \sqrt{\frac{1-\lambda}{2}}$, on a alors

$$\cos\frac{A-B}{2} = 1,$$

d'où

$$A = B.$$

Le triangle est alors isocèle.