Nouvelles annales de mathématiques

S. Realis

Sur les différentes solutions de la question 654

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 2 (1863), p. 510-512

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__510_1>

SUR LES DIFFÉRENTES SOLUTIONS DE LA QUESTION 654;

PAR M. S. REALIS.

Extrait d'une Lettre à M. Prouhet.

Dans la note (p. 307) qui suit la solution générale, donnée par M. E Beltrami, de la question 654 (p. 191) vous demandez : « Pourquoi les méthodes employées » (p. 285 et 286) n'ont-elles conduit qu'à une solution » particulière? » Voici ce que j'avais remarqué à ce sujet, même avant la publication de l'excellent article de M. Beltrami.

Soit une fonction $\varphi(\omega)$ satisfaisant à la condition

$$\varphi(\omega) = \varphi(o)\frac{\sin\omega}{\omega}; \tag{1}$$

on aura aussi

$$\varphi(2\omega) = \varphi(0)\,\frac{\sin 2\omega}{2\omega} = \varphi(0)\,\frac{\sin\omega\cos\omega}{\omega}.$$

Substituant dans cette formule pour $\varphi(0)$ la valeur $\frac{\omega\varphi(\omega)}{\sin\omega}$ déduite de la première, on obtient

$$(2) \qquad \varphi(2\omega) = \varphi(\omega)\cos\omega.$$

La formule (2) est donc une conséquence immédiate de la formule (1), et elle est plus générale que celle-ci, ainsi qu'il résulte des développements fournis par M. Beltrami, en ce qu'elle est indépendante de la valeur particulière que prend la fonction φ quand on y fait $\omega = 0$.

Maintenant, si l'on considère les solutions données aux pages 285 et 286, on verra qu'elles ne prouvent autre chose sinon que la formule (1) satisfait à la condition exprimée par la formule (2).

Dans la première de ces solutions, par un habile emploi d'une formule d'Euler, on passe d'une manière très-élégante de l'équation (2) à l'équation (1); mais en cherchant à vérifier le résultat *à posteriori*, sans l'introduction du produit des cosinus auxiliaires, on reconnaît que la solution revient à celle ci-dessus, c'est-à-dire à faire voir qu'en multipliant entre elles les équations (1) et (2) on retombe sur l'équation (1) :

$$\varphi(\omega).\varphi(2\omega) = \varphi(0)\,\frac{\sin\omega}{\omega}\cdot\varphi(\omega)\cos\omega,$$

$$\varphi(2\omega) = \varphi(0)\,\frac{\sin 2\omega}{2\omega},$$

$$\varphi(\omega) = \varphi(0)\,\frac{\sin\omega}{\omega}.$$

La seconde solution s'applique de même parfaitement à la question inverse de l'énoncé 654, c'est-à-dire à la démonstration de la formule (2) au moyen de la formule (1). Cela doit être, puisque la fonction $\varphi(0)\frac{\sin\omega}{\omega}$ est développable en une série à puissances ascendantes de la variable; mais quant à l'expression générale de la fonction $\varphi(\omega)$ déterminée par la condition (2), elle ne saurait être développée à l'aide de la série de Maclaurin qu'en tant que la fonction générale indiquée par M. Beltrami ne tombe pas dans les cas d'exception de cette série. Or elle tomberait dans un de ces cas si, au lieu de la valeur

$$\varphi'(0) = \varphi'''(0) = \ldots = 0,$$

on prenait les valeurs infinies qui satisfont aussi aux dérivées de l'équation

$$\varphi(2\omega) = \varphi(\omega)\cos\omega.$$

Ces méthodes ne sont donc que des procédés particuliers, conduisant à une conséquence exacte, mais qui n'est elle-même qu'une solution particulière de la question.

Le chapitre XVI du *Calcul infinitésimal* de M. Duhamel renferme des questions qui ont, sous un certain rapport, de l'analogie avec celle qui nous occupe. Des formules (2) des différents paragraphes de ce chapitre, considérées dans des cas particuliers relativement aux constantes arbitraires qui y sont contenues, on remonte bien facilement aux formules générales (1); mais de celles-ci on ne pourrait arriver aux solutions complètes sans avoir recours à des méthodes générales, telles que les procédés de l'intégration des équations différentielles déduites des équations de condition, qui donnent le moyen d'introduire dans les résultats toute la généralité dont ils sont susceptibles.