NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J.-J.-A. MATHIEU

Note sur les coefficients du développement de $\left(\frac{x^p-1}{x-1}\right)^n$

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 2 (1863), p. 509-510

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__509_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

NOTE

Sur les coefficients du développement de $\left(\frac{x^p - 1}{x - 1}\right)^n$;

PAR M. J.-J.-A. MATHIEU,
Capitaine d'artillerie.

J'ai lu, t. XX, p. 397 des *Nouvelles Annales*, un théorème qui est inexact.

L'énoncé porte que si l'on additionne de q en q les coefficients du développement de $(1 + x + x^2 + \ldots + x^{p-2})^n$ (q ne dépassant pas p), les sommes, en nombre q, que l'on peut ainsi former ne sont susceptibles de prendre que les trois valeurs $\frac{(p-1)^n}{q}$, $\frac{(p-1)^n}{q} \pm 1$.

La formule que j'indiquerai à la fin de cette Note expliquera assez comment ce théorème peut se vérifier dans certains cas sans être général. Voici un exemple où il tombe en défaut :

Les coefficients du développement de $(1 + x + \ldots + x^{10})^2$ forment la suite

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1;$$

si l'on additionne de 7 en 7, les sept sommes présenteront quatre résultats différents : 16, 17, 18 et 19.

Mais mon intention en publiant cette Note est bien moins de rectifier une erreur qu'a sans doute déjà reconnue un ancien camarade et ami que de me joindre à lui pour appeler l'attention des savants collaborateurs de ce recueil sur les nombres qui forment les coefficients du développement de $\left(\frac{x^p - 1}{x - 1}\right)^n$, nombres qui me paraissent jouir de propriétés arithmologiques assez curieuses.

Une étude ébauchée de ces coefficients m'a conduit à quelques formules qui mériteront peut-être un examen, et parmi lesquelles je ne citerai, pour le moment, que celle relative à la sommation des termes de q en q.

Soit $p = \dot{q} + r$, r pouvant être par conséquent le reste de la division de p par q ; soit Σ_q une somme de termes pris de q en q dans le développement de $\left(\frac{x^p - 1}{x - 1}\right)^n$, et σ_q la somme analogue dans $\left(\frac{x^r - 1}{x - 1}\right)^n$, les termes qui servent de points de départ aux sommations occupant, dans les deux suites, le même rang qui nė peut évidemment dépasser q :

On a toujours

$$\Sigma_q - \sigma_q = \frac{p^n - r^n}{q}.$$