ALBIN LAVAL

Solution géométrique de la question 632

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 2 (1863), p. 49-50
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__49_0>

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA QUESTION 632;

PAR M. ALBIN LAVAL,
Élève du lycée de Lyon.

ÉNONCÉ. — *On prend le sommet d'un des trois angles dont les côtés réunissent deux à deux quatre points donnés d'une conique, et l'on cherche par rapport aux côtés de cet angle la conjuguée harmonique de la droite qui joint ce sommet au centre de la conique; démontrer que cette conjuguée harmonique et les deux autres droites analogues sont parallèles.* (HOUSEL.)

LEMME I. — *Les six points de rencontre d'une transversale quelconque avec une conique et les côtés d'un quadrilatère inscrit sont en involution.* (Cette proposition est énoncée dans les *Leçons nouvelles de Géométrie* de M. Amiot, dans le cas de la circonférence.) (*) On passe de là à une conique quelconque, en remarquant que, dans la projection perspective, le système des points analogues jouit de la même propriété d'être en involution.

LEMME II. — *Les six points de rencontre d'une transversale quelconque avec les côtés d'un quadrilatère et les diagonales intérieures sont en involution* (**). (*Leçons nouvelles* de M. Amiot.)

(*) Elle est démontrée dans la *Géométrie supérieure* de M. Chasles (p. 464) et dans le *Complément de Géométrie analytique* de M. Page (liv. III, p. 79). C'est le théorème de Desargues sur l'involution.

(**) Le lemme II est, comme le précédent, un cas particulier de cette proposition générale démontrée par Sturm (*Annales de Mathématiques* de Gergonne, t. XVII, p. 180) : *Quand trois lignes du second degré ont quatre points communs, toute transversale les coupe en six points, en involution.* G.

Cela posé, soient O le centre de la conique; A, B, C, D les quatre points donnés; E le point de rencontre des côtés opposés AD, BC du quadrilatère inscrit ABCD; F le point de rencontre des deux autres côtés opposés, AB, CD; et G celui des deux diagonales AC, BD.

Désignons par ET la conjuguée harmonique de EO par rapport aux deux droites EAD, EBC, et menons par le centre O une parallèle à cette conjuguée, parallèle qui coupe les côtés EAD, EBC en M et N. Il résulte d'une propriété connue du faisceau harmonique que OM = ON. Soient P et Q les points où la parallèle menée, MN, coupe les diagonales AC, BD, et H, K ceux où elle coupe la conique. Les six points M, N, P, Q, H, K sont en involution (Lemme I), et comme OM = ON et OH = OK, on aura OP = OQ (*). Ainsi, la droite PQ est partagée en deux parties égales par GO, d'où il faut conclure que la conjuguée harmonique de GO, par rapport aux droites GC, GD, est parallèle à PQ, et par suite à ET.

On démontrerait de même que la conjuguée harmonique de FO, par rapport aux côtés FAB, FDC, est parallèle à PQ. Mais on abrége la démonstration en remarquant que si R, S sont les points où MN prolongée rencontre les droites FAB, FDC, les six points R, S, M, N, P, Q sont en involution (Lemme II); et de ce que OM = ON, OP = OQ, on conclura, comme précédemment, que OR = OS. Cette dernière égalité montre que la conjuguée de FO, par rapport à FB, FC, est parallèle à RS, et par suite à ET. Donc les trois conjuguées harmoniques sont parallèles entre elles.

(*) Lorsque trois couples de points sont en involution, si deux des trois segments qui leur correspondent ont leurs milieux au même point, ce point sera aussi le milieu du troisième segment. Quant au point central de l'involution, il est alors a l'infini. G.