HIOUX

BODEMER

Théorèmes sur les surfaces du second ordre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 2 (1863), p. 488-494

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__488_1>

THÉORÈMES SUR LES SURFACES DU SECOND ORDRE

(voir page 426),

PAR M. HIOUX,
Repétiteur au lycée Bonaparte,

ET M. BODEMER,
Professeur au lycee de Caen.

III. Parmi les plans ABC considérés au § I, il peut y en avoir dont le pôle M s'éloigne à l'infini ; les cônes circonscrits de sommet M se transforment alors en cylindres. Cherchons le lieu des directions des génératrices de ces cylindres.

Pour cela divisons l'équation (4) par γ^2, et faisons tendre $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{6}{\gamma}$ vers des limites finies, à mesure que γ tend vers l'infini.

L'équation, toutes transformations faites, devient

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{H}(\alpha f' x_1 + 6 f' y_1 + \gamma f' z_1)^2 \\ &-[a^2 f' x_1 (f'\alpha - 2c) + b^2 f' y_1 (f' 6 - 2c') \\ &\qquad\qquad + c^2 f' z_1 (f'\gamma - 2c'')] \\ &\times(\alpha f' x_1 + 6 f' y_1 + \gamma f' z_1) \\ &+ f_1 [a^2 (f'\alpha - 2c)^2 + b^2 (f' 6 - 2c')^2 \\ &\qquad\qquad + c^2 (f'\gamma - 2c'')^2] = 0. \end{aligned}\right.$$

Elle est homogène par rapport à α, 6, γ et représente un cône du second ordre dont le sommet est à l'origine.

Les génératrices de ce cône sont les directions des génératrices des divers cylindres circonscrits.

IV. Si l'on considère une génératrice particulière du cône précédent,

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{6}=\frac{z}{\gamma},$$

l'équation (10) représente le lieu des points P, ce qui donne un théorème analogue au théorème II.

La surface du second ordre, lieu des points P, définie par l'équation (10), coupe la surface S suivant deux courbes situées dans les plans

$$\alpha f' x_1 + 6 f' y_1 + \gamma f' z_1 = 0,$$

$$\begin{aligned} &\mathrm{H}\,(\alpha f' x_1 + 6 f' y_1 + \gamma f' z_1) \\ &- [a^2 f' x_1 (f'\alpha - 2c) + b^2 f' y_1 (f' 6 - 2c') \\ &\qquad + c^2 f' z_1 (f' \gamma - 2c'')] = 0 \end{aligned}$$

Le premier est le plan diamétral de la surface S, conjugué de la direction

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{6}=\frac{z}{\gamma}.$$

Le second passe par une droite DE, intersection des deux plans

$$\alpha f' x_1 + 6 f' y_1 + \gamma f' z_1 = 0,$$

$$\begin{aligned} &a^2 f' x_1 (f'\alpha - 2c) + b^2 f' y_1 (f' 6 - 2c') \\ &\qquad + c^2 f' z_1 (f' \gamma - 2c'') = 0. \end{aligned}$$

Ce dernier plan est conjugué de la droite

$$\frac{x}{a^2(f'\alpha - 2c)} = \frac{y}{b^2(f' 6 - 2c')} = \frac{z}{c^2(f'\gamma - 2c'')},$$

par rapport à la surface S.

Cette droite elle-même est conjuguée du plan

$$\alpha f' x_1 + 6 f' y_1 + \gamma f' z_1 = 0,$$

par rapport à l'ellipsoïde E, ce que l'on voit en écrivant l'équation de ce plan sous la forme

$$x_1(f'\alpha - 2c) + y_1(f'\beta - 2c') + z_1(f'\gamma - 2c'') \\ + 2c\alpha + 2c'\beta + 2c''\gamma = 0.$$

Remarquons encore que le plan qui contient cette dernière droite et la génératrice particulière considérée, est conjugué de la droite DE par rapport à la surface S.

V. Quand le point fixe P est sur la surface S, le lieu S' se réduit à deux plans.

Dans ce cas, en effet, $f_1 = 0$, et l'équation (4) se décompose en

$$(11) \qquad V_1 = 0,$$

$$(12) \quad HV_1 - (a^2 f' x_1 f'\alpha + b^2 f' y_1 f'\beta + c^2 f' z_1 f'\gamma) = 0.$$

L'équation (11),

$$x_1 f'\alpha + y_1 f'\beta + z_1 f'\gamma + 2c\alpha + 2c'\beta + 2c''\gamma + 2 = 0,$$

peut s'écrire

$$\alpha f' x_1 + \beta f' y_1 + \gamma f' z_1 + 2c x_1 + 2c' y_1 + 2c'' z_1 + 2 = 0;$$

elle représente le plan tangent à la surface S au point P :

C'est le lieu des pôles de ceux des plans ABC *qui contiennent le point* P.

Quant à l'équation (12), elle représente un plan passant par une droite DE définie par les équations

$$(11) \qquad V_1 = 0,$$

$$(13) \quad a^2 f' x_1 f'\alpha + b^2 f' y_1 f'\beta + c^2 f' z_1 f'\gamma = 0.$$

La polaire réciproque du corollaire I se réduit à deux points : l'un est le point P lui-même ; l'autre, que nous appellerons I, est le point de rencontre de ceux des plans ABC dont le pôle appartient au plan (12).

L'équation (12), mise sous la forme

$$\left(x_1 - \frac{a^2 f' x_1}{H}\right) f'\alpha + \left(y_1 - \frac{b^2 f' y_1}{H}\right) f'\beta + \left(z_1 + \frac{c^2 f' z_1}{H}\right) f'\gamma$$
$$+ 2c\alpha + 2c'\beta + 2c''\gamma + 2 = 0,$$

fait voir que les coordonnées x', y', z' du point I ont pour valeurs

$$x' = x_1 - \frac{a^2 f' x_1}{H}, \quad y' = y_1 - \frac{b^2 f' y_1}{H}, \quad z' = z_1 - \frac{c^2 f' z_1}{H}.$$

La droite PI a, par suite, pour équations

$$\frac{x - x_1}{a^2 f' x_1} = \frac{y - y_1}{b^2 f' y_1} = \frac{z - z_1}{c^2 f' z_1}.$$

Cette droite est la polaire réciproque de DE par rapport à la surface S. Elle est conjuguée du plan (13) par rapport à cette même surface, et du plan (11) par rapport à l'ellipsoïde E. Donc :

Si d'un point P *d'une surface du second ordre* S, *on mène trois droites* PA, PB, PC, *etc., le plan* ABC *coupe en un point fixe* I *la droite menée de* P *qui a ses deux conjuguées tangentes à la surface* S *en ce point.*

Quand on prend pour surface à centre une sphère, la droite PI devient la normale à la surface S au point P. Donc :

Si d'un point P *d'une surface du second ordre, on mène trois droites rectangulaires qui percent la surface aux trois points* A, B, C, *le plan* ABC *coupe en un point fixe la normale à la surface au point* P (*).

VI. Quand le point P est sur la surface S, l'équation

(*) *Voir*, pour ce cas particulier, les *Nouvelles Annales*, cahier de septembre 1862.

du cône (10) considéré au § III se décompose en

$$\alpha f'x_1 + 6 f'y_1 + \gamma f'z_1 = 0,$$

$$\begin{aligned} & H(\alpha f'x_1 + 6 f'y_1 + \gamma f'z_1) \\ & - [a^2 f'x_1 (f'\alpha - 2c) + b^2 f'y_1 (f'6 - 2c') \\ & \qquad + c^2 f'z_1 (f'\gamma - 2c'')] = 0; \end{aligned}$$

ce cône est donc alors l'ensemble de deux plans respectivement parallèles aux plans (11) et (12) du paragraphe précédent, et il y a lieu de considérer deux séries de cylindres circonscrits.

Les premiers ont pour plan tangent commun le plan (11), tangent en P à la surface S; les plans des courbes de contact passent par une même droite PK, conjuguée du plan (11) par rapport à la surface S.

Les seconds admettent pour plan tangent commun un plan parallèle au plan (12) et tangent à la surface S en un point H; les plans des courbes de contact passent par une même droite HL, conjuguée du plan (12) par rapport à la surface S. Ces plans passent d'ailleurs par le point I, pôle du plan (12), car on sait que ce point I est situé sur HL.

Il est clair que les trois droites PI, PK, HL sont situées dans le plan diamétral de la surface S, conjugué de l'intersection DE des plans (11) et (12).

VII. Quand le point P décrit la surface S, le point I décrit une surface du second ordre Σ.

Les coordonnées x, y, z du point I sont données en fonction des coordonnées x_1, y_1, z_1 du point P par les équations

$$(14) \quad x = x_1 - \frac{a^2 f'x_1}{H}, \quad y = y_1 - \frac{b^2 f'y_1}{H}, \quad z = z_1 - \frac{c^2 f'z_1}{H}.$$

On obtiendra l'équation du lieu Σ en éliminant x_1, y_1,

z_1 entre ces équations et l'équation $f_1 = 0$ de la surface S.

On tire de l'équation (14), pour x_1, y_1, z_1, des valeurs de la forme

$$\begin{aligned} x_1 &= ax + by + cz + d, \\ y_1 &= a'x + b'y + c'z + d', \\ z_1 &= a''x + b''y + c''z + d''. \end{aligned}$$

Substituons ces valeurs dans $f_1 = 0$ et nous aurons une équation du second degré en x, y, z qui sera l'équation de la surface Σ.

Cette équation est

$$\begin{aligned} \mathrm{A}x_1^2 + \mathrm{A}'y_1^2 + \mathrm{A}''z_1^2 + 2\mathrm{B}y_1z_1 + 2\mathrm{B}'x_1z_1 + 2\mathrm{B}''x_1y_1 \\ + 2\mathrm{C}x_1 + 2\mathrm{C}'y_1 + 2\mathrm{C}''z_1 + 1 = 0, \end{aligned}$$

en y considérant x_1, y_1, z_1 comme tenant lieu des valeurs ci-dessus.

Pour reconnaître la nature de cette surface, prenons pour plans coordonnés des $x'y'$, des $x'z'$, des $y'z'$ les plans

$$z_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad x_1 = 0.$$

Soit γ l'angle que la perpendiculaire MP, abaissée d'un point quelconque M de Σ sur le plan $z_1 = 0$, fait avec l'axe des z'. En égalant les deux expressions de la longueur de cette perpendiculaire, on a

$$z'\cos\gamma = \frac{z_1}{\sqrt{a''^2 + b''^2 + c''^2}},$$

d'où, en posant

$$k = \cos\gamma\sqrt{a''^2 + b''^2 + c''^2},$$

on tire

$$z_1 = kz'$$

On trouverait d'une manière analogue

$$y_1 = hy', \quad x_1 = gx'.$$

L'équation de la surface Σ rapportée aux nouveaux plans coordonnés est donc

$$A(gx')^2 + A'(hy')^2 + A''(kz')^2 + \ldots + 1 = 0.$$

Si l'on fait maintenant

$$gx' = X', \quad hy' = Y', \quad kz' = Z',$$

c'est-à-dire si l'on diminue les coordonnées de cette surface dans les rapports $\frac{1}{g}, \frac{1}{h}, \frac{1}{k}$, on obtiendra une nouvelle surface, de même nature que Σ, représentée par l'équation

$$AX'^2 + A'Y'^2 + A''Z'^2 + \ldots + 1 = 0.$$

Inclinons d'un autre côté les coordonnées de la surface S dans les directions des nouveaux axes, nous formerons une autre surface de même nature que S, et il est clair qu'en la transportant parallèlement à elle-même on pourra la faire coïncider avec la surface précédente.

On en conclut que les surfaces Σ et S sont deux surfaces de même nature. (*Fin.*)