J.-J.-A. Mathieu

Démonstration analytique de quelques théorèmes sur la parabole

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 2 (1863), p. 466-472

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__466_1>

DÉMONSTRATION ANALYTIQUE
DE QUELQUES THÉORÈMES SUR LA PARABOLE;

Par M. J.-J.-A. MATHIEU,
Capitaine d'artillerie.

Sur la parabole inscrite dans un angle donné, on peut démontrer les théorèmes qui suivent :

1. *La directrice passant par un point fixe, le lieu du*

foyer est le cercle circonscrit au triangle déterminé par l'angle donné et le point fixe pris pour point d'intersection des trois hauteurs.

2. Inversement, *si le lieu du foyer est un cercle passant par le sommet de l'angle donné, la directrice passe par un point fixe, intersection des trois hauteurs du triangle déterminé par l'angle donné et le cercle pris pour cercle circonscrit.*

3. *La parabole étant tangente à une troisième droite, la directrice passe par un point fixe, intersection des trois hauteurs du triangle formé par les tangentes.*

4. Il résulte des théorèmes 1 et 3 que *le lieu du foyer d'une parabole tangente à trois droites est le cercle circonscrit au triangle formé par ces droites* (théorème bien connu).

5. *L'un des points de contact de la parabole inscrite étant donné, la directrice passe par un point fixe, intersection de la perpendiculaire élevée par le sommet de l'angle, au côté dont le point de contact est connu, avec la perpendiculaire abaissée de ce point de contact sur l'autre côté.*

6. Il résulte des théorèmes 1 et 5 que *le lieu du foyer d'une parabole inscrite dans un angle, avec un point de contact donné, est le cercle circonscrit au triangle déterminé par l'angle donné et le point fixe de la directrice pris pour point d'intersection des trois hauteurs.*

7. *La direction des diamètres de la parabole inscrite étant donnée, la directrice passe par un point fixe situé à l'infini, le cercle lieu du foyer devient alors une droite passant par le sommet de l'angle et ayant, par rapport aux côtés de l'angle pris pour axes, un coefficient angulaire réciproque de celui de la direction des diamètres.*

J'indiquerai succinctement l'analyse bien simple qui fournit la démonstration de ces théorèmes. Les candidats pourront y trouver d'utiles exercices de calcul et des moyens pour résoudre plusieurs problèmes sur la construction des paraboles soumises à des conditions données.

L'équation générale, contenant deux paramètres variables, des paraboles inscrites dans un angle peut recevoir la forme

$$(1) \qquad (dy - ex)^2 + 2(dy + ex) + 1 = 0.$$

Cherchant la condition pour qu'une droite $y = mx + n$ soit tangente à la parabole (1), on trouve

$$(2) \qquad n(dm - e) + m = 0.$$

On déduit de là que l'équation de la directrice, considérée comme le lieu des sommets des angles droits circonscrits à la parabole, est

$$(3) \qquad y(e + d\cos\theta) + x(d + e\cos\theta) + \cos\theta = 0.$$

Par l'identification de cette équation avec celle de la polaire, on trouve les équations qui déterminent les coordonnées du pôle de la directrice, c'est-à-dire du foyer :

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} & y_1(d + 2e\cos\theta) + x_1 e + 1 = 0, \\ & y_1 d + x_1(e + 2d\cos\theta) + 1 = 0. \end{aligned} \right.$$

L'élimination de d et e entre les équations (3) et (4) conduit à

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} & y(x_1 + y_1\cos\theta) + x(y_1 + x_1\cos\theta) \\ & \qquad - \cos\theta(x_1^2 + y_1^2 + 2x_1y_1\cos\theta) = 0. \end{aligned} \right.$$

La directrice passant par un point donné, on voit sans difficulté que l'équation (5) en x_1, y_1 représente un cercle passant par le sommet de l'angle et coupant les axes de manière que le triangle inscrit a pour point d'intersection des hauteurs le point donné, ce qui démontre le théorème 1.

Si on a

$$x_1^2 + y_1^2 + 2x_1y_1\cos\theta = ax_1 + by_1,$$

c'est-à-dire si le lieu du foyer est un cercle passant par le sommet de l'angle, l'équation (5) devient

$$\frac{y_1}{x_1}(x + y\cos\theta - b\cos\theta) + y + x\cos\theta - a\cos\theta = 0.$$

La directrice passe donc par un point fixe, intersection des deux droites :

$$\left\{\begin{array}{l} x + y\cos\theta - b\cos\theta = 0, \\ y + x\cos\theta - a\cos\theta = 0, \end{array}\right.$$

ce qui démontre le théorème 2, car ces équations représentent deux hauteurs du triangle inscrit.

Pour démontrer le théorème 3, soit

$$\frac{y}{b} + \frac{x}{a} = 1$$

l'équation d'une troisième tangente : l'équation de condition (2) donne entre a et b la relation

$$db + ea + 1 = 0.$$

Par l'élimination de e entre cette relation et l'équation (3) de la directrice, on trouve

$$d[y(a\cos\theta - b) + x(a - b\cos\theta)] + a\cos\theta - y - x\cos\theta = 0.$$

Cette équation représente une droite passant par un point fixe, intersection des deux droites :

$$\left\{\begin{array}{l} y(a\cos\theta - b) + x(a - b\cos\theta) = 0, \\ a\cos\theta - y - x\cos\theta = 0. \end{array}\right.$$

Ces droites représentant deux hauteurs du triangle, les théorèmes 3 et 4 sont démontrés.

Les théorèmes 5 et 6 s'aperçoivent tout de suite au moyen de l'équation (3), qui ne contient plus qu'un paramètre variable quand l'un des points de contact de la parabole inscrite est donné.

Enfin le théorème 7 se démontre en posant

$$\frac{e}{d} = \text{const.} = k,$$

et en éliminant les paramètres variables des équations (4), ce qui conduit simplement à

$$y_1 = \frac{1}{k}\, x_1.$$

Note de M. Mathieu.

J'ai donné, dans l'article précédent, la démonstration de sept théorèmes sur la parabole; voici la démonstration non moins facile de cinq autres. Ces douze théorèmes sont susceptibles d'une foule d'applications à un grand nombre de problèmes sur la parabole, qu'ils permettent de résoudre graphiquement de la manière la plus simple.

8. *Par quatre points, formant un quadrilatère convexe, on peut faire passer deux paraboles. Les diamètres de ces paraboles sont parallèles aux côtés de l'un quelconque des trois parallélogrammes construits en prenant pour diagonales un système de droites passant par les quatre points, et pour sommets, des points conjugués harmoniquement aux sommets du quadrilatère.*

9. *Dans le triangle dérivé du quadrilatère, qui a pour sommets les points d'intersection des deux droites de chaque système, les droites qui joignent les milieux des*

côtés sont des tangentes communes aux deux paraboles.

10. Il résulte de ce qui précède que *les directrices des deux paraboles circonscrites à un quadrilatère se coupent au centre du cercle circonscrit au triangle dérivé.*

11. Il en résulte aussi que *les foyers des deux paraboles sont sur le cercle qui passe par les milieux des côtés du triangle dérivé.*

12. Enfin, *si l'on mène par les sommets du triangle que forment les tangentes communes trois droites ayant, par rapport aux côtés de ce triangle, une inclinaison réciproque de celle des diamètres de l'une des paraboles, ces trois droites iront se couper en un même point, situé sur le cercle circonscrit à ce triangle, qui est le foyer de la parabole que l'on considère.*

Je prends pour axes l'un quelconque des systèmes de droites passant par les quatre points. Représentant par p et p', q et q' les distances comprises entre l'origine et les sommets du quadrilatère, on reconnaît facilement que les deux paraboles circonscrites au quadrilatère ont pour équations

$$\frac{x^2}{pp'} \pm \frac{2xy}{\sqrt{pp'qq'}} + \frac{y^2}{qq'} - x\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}\right) - y\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}\right) + 1 = 0.$$

Les coefficients angulaires des diamètres de ces deux paraboles ayant pour valeurs $\pm \frac{\sqrt{qq'}}{\sqrt{pp'}}$, le théorème 8 en résulte (*).

(*) Soit o le point de rencontre des côtes pp', qq', axes des x et des y. Prenez sur opp', oqq' les distances om, on respectivement égales à $\sqrt{op.op'}$, $\sqrt{oq.oq'}$: la médiane ol du triangle omn sera parallèle aux diamètres de l'une des deux paraboles. Cela résulte du théorème de Newton sur les segments. Car, si l'on mène à la parabole deux tangentes st, st' parallèles

Dans l'équation d'une parabole la somme des termes du premier degré et du terme indépendant représente toujours l'équation d'une droite tangente à la courbe. Mais la droite

$$x\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}\right)+y\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}\right)-1=0$$

passe évidemment par les points

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{2x}{p}+\dfrac{2y}{q}-1=0,\\[2mm] \dfrac{2x}{p'}+\dfrac{2y}{q'}-1=0,\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}\dfrac{2x}{p}+\dfrac{2y}{q'}-1=0,\\[2mm] \dfrac{2x}{p'}+\dfrac{2y}{q}-1=0.\end{array}\right.$$

Or, il est facile de voir que ces points sont justement les points milieux des côtés du triangle dérivé, qui aboutissent à l'origine, et comme on pouvait prendre pour origine l'un quelconque des trois sommets du triangle dérivé, le théorème 9 est démontré.

Les théorèmes 10, 11 et 12 sont des conséquences immédiates de théorèmes démontrés.

à *om*, *on*, elles seront entre elles dans le rapport $\frac{om}{on}$. La corde des con tacts tt' sera donc parallèle à mn, et, par conséquent, les diamètres seront parallèles à la médiane ol. L'équation de ol est $y=\frac{\sqrt{oq.oq'}}{\sqrt{op.op'}}x$. Le coefficient angulaire des diamètres est $\frac{\sqrt{oq.oq'}}{\sqrt{op.op'}}$. C'est un des résultats du calcul de M. Mathieu. G.