NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J.-CH. DUPAIN

Note sur les annuités

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 2 (1863), p. 464-466

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__464_1>

NOTE SUR LES ANNUITÉS;

PAR M. J.-CH. DUPAIN.

Une personne contracte un emprunt remboursable au moyen de n annuités de a francs; on a calculé qu'il serait aussi avantageux pour elle de payer m annuités de b francs. On demande à combien on évalue le taux de l'intérêt. Le premier payement s'effectue un an après le jour de l'emprunt.

Appelons x l'intérêt annuel d'un franc; la valeur de la dette au moment où elle est contractée peut se représenter indifféremment par

$$\frac{a[(1+x)^n-1]}{x(1+x)^n} \quad \text{ou par} \quad \frac{b[(1+x)^m-1]}{x(1+x)^m};$$

on en conclut que

$$(a-b)(1+x)^m - a(1+x)^{m-n} + b = 0,$$

ou, en posant $y = 1 + x$,

$$(1) \qquad y^m - \frac{a}{a-b}y^{m-n} + \frac{b}{a-b} = 0.$$

Les annuités étant évidemment inégales, on peut supposer $a > b$, ce qui exige par compensation $m > n$.

L'équation (1) a pour racine l'unité, et comme d'ailleurs son premier membre présente deux variations, le nombre des racines positives est certainement deux.

La règle de Descartes permet de compter les racines négatives :

$$\begin{cases} m \text{ impair} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{une racine négative,} \\ m \text{ pair} \ldots\ldots \begin{cases} n \text{ pair} \ldots\ldots \\ n \text{ impair} \ldots \end{cases} & \begin{array}{l} \text{deux racines négatives,} \\ \text{pas de racines négatives.} \end{array} \end{cases}$$

Les racines négatives n'ont pas d'importance dans la question proposée.

L'équation dérivée

$$(2) \qquad my^{m-1} - \frac{a}{a-b}(m-n)y^{m-n-1} = 0$$

a toujours $m-n-1$ racines nulles, une racine positive $\sqrt[n]{\frac{a(m-n)}{m(a-b)}}$, et, si n est pair, une racine négative. La racine positive de la dérivée *sépare* les deux racines positives de l'équation (1). Or, d'après la nature du problème, il faut que y ait une valeur supérieure à 1; il faut donc aussi que la racine positive de la dérivée soit supérieure à l'unité, ce qui revient à $\frac{m}{n} > \frac{a}{b}$.

La règle de Lagrange donne pour limite supérieure des racines de l'équation (1) $\sqrt[n]{\frac{a}{a-b}}$. En effet, cette quantité est plus grande que l'unité, et si on la substitue à y dans le premier membre de l'équation (1), on trouve un résultat positif $\frac{b}{a-b}$.

La valeur convenable de y étant ainsi comprise entre deux nombres connus peut s'obtenir par les méthodes ordinaires d'approximation.

Dans quelques cas particuliers elle est une fonction explicite des données. Soit $2m = 3n$, l'équation (1) deviendra

$$y^{3(m-n)} - \frac{a}{a-b}\, y^{m-n} + \frac{b}{a-b} = 0;$$

le premier membre est alors divisible par $y^{m-n} - 1$, et l'on trouve

$$y = \sqrt[m-n]{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{b}{a-b}}}.$$

Si $m = 2n$,

$$y^{2n} - \frac{a}{a-b}\, y^{n} + \frac{b}{a-b} = 0;$$

le premier membre est divisible par $y^n - 1$, et l'on trouve

$$y = \sqrt[n]{\frac{b}{a-b}}.$$

Si $m = 3n$,

$$y^{3n} - \frac{a}{a-b}\, y^{n} + \frac{b}{a-b} = 0;$$

le premier membre est encore divisible par $y^n - 1$, et l'on trouve

$$y = \frac{1}{\sqrt[n]{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{a-b}{b}}}}.$$