GUSTAVE DUBOIS

# Question d'examen

*Nouvelles annales de mathématiques 2e série*, tome 2 (1863), p. 462-464

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__462_1>

## QUESTION D'EXAMEN;

SOLUTION DE M. G. DUBOIS,
Professeur de Mathématiques.

*Trouver le lieu géométrique des points tels, que le rapport de leurs distances à deux droites données* AB, CD, *non situées dans un même plan, soit égal à un rapport donné* $k$.

Soient $a$ la plus courte distance des deux droites données, $\alpha$ l'angle qu'elles font entre elles.

Prenons pour axe des $z$ l'une des droites AB, pour axe des $x$ la plus courte distance, et pour axe des $y$ une perpendiculaire aux deux premiers axes.

La distance d'un point M $(x, y, z)$ du lieu à la droite AB, prise pour axe des $z$, est évidemment

$$\sqrt{x^2 + y^2}.$$

On obtiendra la distance du même point M à la droite CD, en remarquant qu'elle est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont, d'une part $\pm (x - a)$, et de l'autre la distance de la projection du point M sur le plan YOZ à la projection de la droite CD sur ce même plan. Or, cette dernière distance est égale à

$$y \cos\alpha - z \sin\alpha,$$

donc la distance du point M à la droite CD est égale à

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y\cos\alpha - z\sin\alpha)^2}.$$

L'équation du lieu demandé est donc

$$(1) \qquad \frac{x^2 + y^2}{(x-a)^2 + (y\cos\alpha - z\sin\alpha)^2} = k^2,$$

ou bien

$$k^2(y\cos\alpha - z\sin\alpha)^2 - y^2 + (k^2 - 1)\left(x - \frac{ak^2}{k^2-1}\right)^2 = \frac{a^2k^2}{k^2-1}.$$

Sous cette forme, on reconnaît immédiatement que ce lieu est un hyperboloïde à une nappe, ayant pour plans diamétraux conjugués

$$y\cos\alpha - z\sin\alpha = 0, \quad y = 0, \quad x = \frac{ak^2}{k^2-1},$$

c'est-à-dire le plan des $zx$, un plan parallèle au plan des $zy$, et un plan passant par la droite CD et l'axe des $x$.

Il en résulte que le centre de l'hyperboloïde est situé sur la plus courte distance des deux droites données AB, CD, en un point qui partage cette droite en deux segments soustractifs dont le rapport est égal au carré du rapport donné $k$; et que les parallèles aux deux droites données menées par ce centre sont des diamètres de cet hyperboloïde.

Dans le cas particulier où $k = 1$, l'équation (1) peut s'écrire

$$(y\cos\alpha - z\sin\alpha)^2 - y^2 = 2a\left(x - \frac{a}{2}\right);$$

elle représente alors un paraboloïde hyperbolique, qui passe au milieu de la plus courte distance des deux droites données, et a cette plus courte distance pour diamètre conjugué des plans parallèles à ces deux droites, lesquelles sont parallèles à deux diamètres conjugués de toutes les sections faites par ces mêmes plans.