NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. LEMONNIER

Description d'un mouvement continu du lieu qui fait l'objet de la composition de géométrie analytique au concours d'admission à l'École polytechnique en 1863

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 2 (1863), p. 460-462

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__460_0>

DESCRIPTION D'UN MOUVEMENT CONTINU DU LIEU qui fait l'objet de la Composition de Géométrie analytique au Concours d'admission à l'École Polytechnique en 1863;

PAR M. H. LEMONNIER,
Professeur de Mathématiques au lycée Saint-Louis.

L'énoncé du problème revient au suivant :

Étant donnés deux cercles sur un plan, on fait mouvoir un point mobile P *sur la circonférence du premier, on prend les polaires de ce point par rapport aux deux cercles; on demande le lieu du point de rencontre des deux polaires.*

Quand des cercles sur un plan ont un même axe radical, on sait que les polaires d'un point quelconque du plan par rapport à ces cercles concourent en un même point. C'est un cas particulier d'un théorème général concernant les coniques qui passent par quatre points réels ou imaginaires.

Qu'on prenne, au reste, pour axe des Y l'axe radical commun, l'équation générale des cercles sera, en coordonnées rectangulaires,

$$(x-a)^2+(y-b)^2-\mathrm{A}=2\lambda x,$$

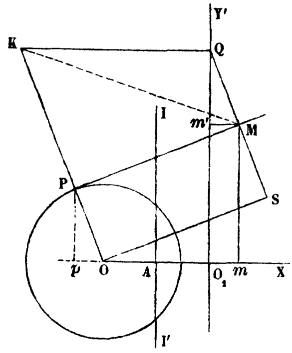
celle de la polaire du point (XY) sera

$$(x-a)(\mathrm{X}-a)+(y-b)(\mathrm{Y}-b)-\mathrm{A}=\lambda(x+\mathrm{X}).$$

Par conséquent la polaire passe par le point fixe que donnent

$$x=-\mathrm{X} \quad \text{et} \quad -(\mathrm{X}^2-a^2)+(y-b)(\mathrm{Y}-b)-\mathrm{A}=0.$$

Cela posé, soit O le centre du cercle de rayon R sur



lequel se prend le point mobile P, et soit II' l'axe radical de ce cercle et du second cercle donné.

Si M est un point du lieu correspondant au point P, et que leurs projections sur la droite OA perpendiculaire à II' soient m et p, on voit, d'après ce qui précède, que ces projections sont symétriques l'une de l'autre à l'égard du point A.

Donc, si on prend $AO_1 = OA$, on aura $O_1 m = pO$.

Menons sur OA la perpendiculaire O_1Y', sur PM la perpendiculaire MQ, et soit Mm' une parallèle à OA.

Le triangle QMm' se trouve égal au triangle Pop, d'où il suit que.

$$QM = PO = R.$$

Donc, si on prolonge QM de MS = MQ, la droite OS sera parallèle à PM, l'angle S sera droit.

Donc, si on fait mouvoir un angle droit S de façon que l'un des côtés indéfinis passe par le point fixe O et que l'autre côté s'appuie sur la droite O_1Y' par un point Q situé sur ce côté à une distance constante 2 R du sommet S, le point M milieu de SQ décrira le lieu demandé.

Qu'on ait $SQ = OO_1 = 2OA$, le lieu sera, d'après Newton, une cissoïde ayant le point A pour sommet, etc.

J'ajouterai que la normale du lieu, au point M, s'obtiendra en joignant ce point au point K où se coupent la normale menée en Q sur la directrice rectiligne O_1Q et la normale menée en O sur OS.