NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

V.-A. LE BESGUE

Sur deux questions de maximum

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 2 (1863), p. 433-449

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__433_0>

SUR DEUX QUESTIONS DE MAXIMUM;

PAR M. V.-A. LE BESGUE,
Correspondant de l'Institut.

I.

1. PROBLÈME I. — *Construire un parallélipipède* OABCD, *connaissant les arêtes* $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ *et la diagonale* $OD = d$, *sachant d'ailleurs que les plans diagonaux* DOA, DOB, DOC *sont respectivement perpendiculaires aux faces* BOC, COA, AOB.

PROBLÈME II. — *Construire un tétraèdre* OABC *dont les faces* OBC, OAC, OAB, ABC *ont des aires données* a, b, c, d, *sachant d'ailleurs que les arêtes* OA, OB, OC *sont respectivement perpendiculaires aux arêtes opposées* BC, CA, AB.

On voit tout de suite, pour le problème I, que la condition de perpendicularité revient à dire que le volume doit être maximum, puisque les données a, b, c, d resteraient les mêmes en faisant tourner un plan diagonal sur son intersection avec la face opposée du parallélipipède. Pour le second problème, la condition de perpendicularité revient encore à dire que le volume est maximum; mais pour le voir il faut, ou mettre le problème en équation par l'emploi du calcul différentiel, ou, ce qui est préférable, établir quelques théorèmes qui montrent la corrélation des deux questions, et desquels il résulte que si l'on a remplacé les aires a, b, c, d du second problème par des lignes proportionnelles, et qu'on ait construit avec ces lignes un parallélipipède satisfaisant au problème I, il suffira de mener des plans perpendiculaires aux arêtes et à la diagonale de ce parallélipipède pour obtenir un tétraèdre dont les faces auront des aires proportionnelles aux aires données et qui conduira à un autre ayant des faces dont les aires seront données. Ce tétraèdre étant construit, on voit tout de suite que le tétraèdre symétrique satisfera encore.

Les deux questions conduisent, comme on va le voir, aux trois mêmes équations entre trois inconnues, et on ramène la solution à celle d'une équation du quatrième degré.

Quand deux des données a, b, c, d sont égales, l'équation du quatrième degré se ramène au second, et la solution est géométrique.

On pourrait donner au problème un autre énoncé. Dans un parallélipipède OABCD, les trois plans diagonaux coupant en leurs milieux les côtés du triangle ABC, leur intersection, qui n'est autre que la diagonale OD, va passer par le centre de gravité g du triangle ABC, et on a $Og = \frac{1}{3}OD$; cette intersection passe aussi par le centre G de gravité du tétraèdre OABC, et on a $OG = \frac{1}{4}OD$; on pourrait donc énoncer ainsi le problème I : *Construire un tétraèdre* OABC *dont on connaît les arêtes* OA, OB, OC *et la distance* OG *du sommet* O *au centre de gravité, sachant d'ailleurs que le plan qui passe par le centre de gravité et une arête est perpendiculaire sur la face opposée.* Comme le tétraèdre a pour volume la sixième partie du volume du parallélipipède, c'est encore un cas de maximum.

II.

Premier problème.

2. *I^re^ Solution.*—Si l'on désigne par x, y, z les an-

gles des arêtes BOC $= x$, COA $= y$, AOB $= z$, on aura

(1) $d^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2bc\cos x + 2ca\cos y + 2ab\cos z$,

et pour la condition de perpendicularité

$$(2)\quad \begin{cases} a(\cos y\cos z - \cos x) = b(\cos z\cos x - \cos y) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = c(\cos x\cos y - \cos z), \end{cases}$$

ce qui se trouve facilement au moyen de la formule des triangles sphériques rectangles

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma.$$

On verra plus loin comment le calcul différentiel donne les équations (2).

Le système (2) se transforme comme il suit : soient X, Y, Z les angles des perpendiculaires aux trois faces qui passent par b, c; c, a; a, b, c'est-à-dire les suppléments des angles des faces, on aura les formules

$$\cos x\cos y - \cos z = \sin x\sin y\cos Z, \ldots,$$
$$\cos X\cos Y - \cos Z = \sin X\sin Y\cos z, \ldots,$$

de sorte qu'en changeant les binômes de (2) en monômes et divisant par $\sin x\sin y\sin z$, puis remplaçant $\sin x$, $\sin y$, $\sin z$ par les sinus proportionnels $\sin X$, $\sin Y$, $\sin Z$, il vient

$$(1)'\qquad a\cot X = b\cot Y = c\cot Z,$$

d'où il résulte que $\cos X$, $\cos Y$, $\cos Z$ seront tous positifs ou tous négatifs.

L'équation (1) devient

$$(2)'\quad \begin{cases} d^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2bc\cot Y\cot Z \\ \quad + 2ca\cot Z\cot X + 2ab\cot X\cot Y \\ \quad - 2\left(\dfrac{bc\cos X\sin X + ca\cos Y\sin Y + ab\cos Z\sin Z}{\sin X\sin Y\sin Z}\right). \end{cases}$$

Le système $(1)'$ $(2)'$ où les inconnues sont X, Y, Z conduit à l'équation de *Lagrange*.

Si l'on pose

$$a\cot X = b\cot Y = c\cot Z = u,$$

d'où

$$\sin X = \frac{a}{\sqrt{u^2+a^2}}, \quad \cos X = \frac{u}{\sqrt{u^2+a^2}}, \ldots,$$

le radical $\sqrt{u^2+a^2}$ étant pris positivement, l'équation $(2)'$ deviendra, en faisant, pour abréger,

$$a^2+b^2+c^2-d^2 = 2e,$$

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} 3u^2+e = u & \left[\frac{1}{u^2+a^2}+\frac{1}{u^2+b^2}+\frac{1}{u^2+c^2}\right] \\ & \times \sqrt{(u^2+a^2)(u^2+b^2)(u^2+c^2)}. \end{aligned} \right.$$

En voici la discussion: c'est une simplification de celle donnée par M. Painvin (*Nouvelles Annales*, 1862; p. 353 et suivantes).

Nous ferons

$$(u^2+a^2)(u^2+b^2)(u^2+c^2) = u^6 + Au^4 + Bu^2 + C,$$

$$A = a^2+b^2+c^2, \quad B = a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2, \quad C = a^2b^2c^2;$$

l'équation en u deviendra, en posant $u^2 = \theta$,

$$\theta(3\theta^2+2A\theta+B)^2 - (\theta^3+A\theta^2+B\theta+C)(9\theta^2+6e\theta+e^2) = 0$$

ou

$$(4) \qquad 3d^2\theta^4 + P_1\theta^3 + P_2\theta^2 + P_3\theta - Ce^2 = 0,$$

en posant

$$P_1 = 4A^2 - 3B - 6Ae - e^2, \quad P_2 = 4AB - 9C - 6Be - Ae^2,$$
$$P_3 = B^2 - 6Ce - Be^2.$$

3. Pour discuter facilement cette équation, supposons

$a > b > c > d$: il en résultera e positif; donc u le sera aussi, d'après l'équation (3). Il faut prendre les valeurs positives de θ^2, puis faire $u = \sqrt{\theta}$. Or, il n'y a qu'une racine positive. En effet, le premier terme de l'équation (4) étant positif et le dernier négatif, on a déjà une racine positive et une négative pour θ. De plus, si l'on pose

$$4P_3 = -[B(2e)^2 + 12C(2e) - 4B^2],$$

comme on a

$$2e > a^2 + b^2 \quad \text{et} \quad 2e < a^2 + b^2 + c^2,$$

même en mettant pour $2e$ dans $4P_3$ sa moindre limite $a^2 + b^2$, la quantité

$$B(2e)^2 + 12C(2e) - 4B^2 = U$$

sera positive, comme on le voit en posant

$$a^2 = c^2 + \alpha, \quad b^2 = c^2 + \beta,$$

et ordonnant U suivant les puissances de c^2; car, réduction faite, tous les termes sont essentiellement positifs. Il suit de là que P_3 est négatif dans tous les cas. De plus, si l'on remarque que

$$AP_1 - P_2 = 4A^3 - 7AB + 9C - 6e(A^2 - B),$$

où $A^2 - B$ est essentiellement positif, reste positif même quand on met pour $2e$ sa plus grande limite A, puisque l'on a

$$AP_1 - P_2 > A^3 - 4AB + 9C,$$

et qu'en posant

$$a^2 = c^2 + \alpha, \quad b^2 = c^2 + \beta,$$

on a pour $A^3 - 4AB + 9C$ une quantité essentiellement positive, il faut donc, si P_2 est positif, avoir P_1 positif, et l'équation n'a qu'une variation; si P_2 est négatif, P_1

peut être positif ou négatif, mais il n'y a encore qu'une variation. Ainsi θ a une seule valeur positive.

Pour la réalité de la solution il faut que les deux conditions

$$X + Y + Z < 4 \text{ droits}, \quad Y + Z - X > 0$$

soient satisfaites; or, comme X, Y, Z sont aigus, la première l'est nécessairement. Comme $Y + Z - X$ est inférieur à deux droits, il faut que

$$\operatorname{tang}(Y + Z - X)$$
$$= \frac{\operatorname{tang} Y + \operatorname{tang} Z - \operatorname{tang} X + \operatorname{tang} X \operatorname{tang} Y \operatorname{tang} Z}{1 - \operatorname{tang} Y \operatorname{tang} Z + \operatorname{tang} Z \operatorname{tang} X + \operatorname{tang} X \operatorname{tang} Y}$$

soit positif. Or le second membre devient

$$\frac{u^2(b + c - a) + abc}{u(u^2 + ab + ac - bc)}$$

et le dénominateur est positif; le numérateur devra l'être, ce qui arrive toujours pour $b + c - a > 0$ ou $= 0$. Mais si $a - b - c$ est positif, il faut avoir

$$u^2 < \frac{abc}{a - b - c} < \frac{abc}{\delta},$$

en posant

$$a - b - c = \delta.$$

Cherchons ce que devient pour $u^2 = \frac{abe}{\delta}$ la quantité

$$\begin{aligned} P = u^2[&(u^2 + a^2)(u^2 + b^2) + (u^2 + b^2)(u^2 + c^2) \\ &+ (u^2 + c^2)(u^2 + a^2)]^2 - (3u^2 + e)^2(u^2 + a^2)(u^2 + b^2)(u^2 + c^2); \end{aligned}$$

car l'équation (4) n'est autre que $P = 0$.

Comme on trouve

$$u^2 + a^2 = \frac{a^2}{\delta}(b + \delta)(c + \delta),$$

$$u^2 + b^2 = \frac{b}{\delta}(a - \delta)(c + \delta),$$

$$u^2 + c^2 = \frac{c}{\delta}(a - \delta)(b + \delta),$$

il en résulte

$$\begin{aligned} 4\delta^2 P &= [6abc + 2\delta(ab + ac - bc)]^2 \\ &\quad - [6abc + \delta(a^2 + b^2 + c^2 - d^2)]^2 \\ &= [12abc + \delta(a^2 + b^2 + c^2 - d^2 + 2ab + 2ac - 2bc)] \\ &\quad \times (d^2 - a^2 - b^2 - c^2 + 2ab + 2ac - 2bc)\delta. \end{aligned}$$

Or, le premier et le troisième facteurs sont positifs, le second peut se mettre sous la forme d'un produit

$$d^2 - (a - b - c)^2 = (d + a - b - c)(d + b + c - a)$$

essentiellement positif, chaque facteur l'étant, puisque dans un quadrilatère gauche un côté est moindre que la somme des trois autres.

Comme $u^2 = \frac{abc}{\delta}$ donne à P le signe $+$ et que $u = 0$ donne à P le signe $-$, la valeur de u^2 est comprise entre o et $\frac{abc}{a - b - c}$.

On trouve donc un seul système de valeurs réelles pour X, Y, Z, et par suite un aussi pour x, y, z; mais avec ces valeurs on peut faire deux tétraèdres symétriques qui satisfont à la question.

Nous avons supposé $a > b > c > d$, mais il est à remarquer que si les arêtes $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ et la diagonale $OD = d$ sont prolongées de sorte que

$$OA' = a, \quad OB' = b, \quad OC' = c, \quad OD' = d,$$

on formera autour de O huit parallélipipèdes équivalents symétriques deux à deux. En ne prenant que les quatre qui n'en contiennent pas deux symétriques, on voit que dans l'un la diagonale sera a, dans l'autre b, dans un troisième c, dans le quatrième d. D'ailleurs, si dans l'un la condition de perpendicularité des plans diagonaux sur les faces opposées est satisfaite, elle le sera aussi dans les autres : on peut donc supposer sans inconvénient que l'on a

$$a > b > c > d.$$

4. *IIe Solution.* — Dans le système

$$a(\cos y \cos z - \cos x) = b(\cos z \cos x - \cos y) = c(\cos x \cos y - \cos z),$$
$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2bc\cos x + 2ca\cos y + 2ab\cos z$$

on prendra

$$b^2 + c^2 + 2bc\cos x = r^2,$$
$$c^2 + a^2 + 2ca\cos y = s^2,$$
$$a^2 + b^2 + 2ab\cos z = t^2.$$

r, s, t seront les diagonales des faces. On aura d'abord, en posant

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \sigma^2,$$

l'équation

$$\sigma^2 = r^2 + s^2 + t^2.$$

Les conditions de perpendicularité deviendront

$$(a) \quad \left\{ \begin{array}{l} r^4 - r^2\sigma^2 + (d^2 - a^2)(c^2 - b^2) = -2r^2t^2, \\ s^4 - s^2\sigma^2 + (d^2 - b^2)(a^2 - c^2) = -2s^2r^2, \\ t^4 - t^2\sigma^2 + (d^2 - c^2)(b^2 - a^2) = -2t^2s^2; \end{array} \right.$$

on pourrait aussi prendre

$$(b) \quad \left\{ \begin{array}{l} r^4 - r^2\sigma^2 + (d^2 - a^2)(b^2 - c^2) = -2r^2s^2, \\ s^4 - s^2\sigma^2 + (d^2 - b^2)(c^2 - a^2) = -2s^2t^2, \\ t^4 - t^2\sigma^2 + (d^2 - c^2)(a^2 - b^2) = -2t^2r^2; \end{array} \right.$$

ces équations ajoutées membre à membre avec les précédentes donnent

$$r^2 + t^2 + s^2 = \sigma^2.$$

Si l'on prend la valeur de t^2 dans la première équation (a) et qu'on la substitue dans la dernière équation (b), on trouve

$$(c)\left\{\begin{array}{l} 3r^8 - 4(a^2+b^2+c^2+d^2)\,r^6 + [(a^2-d^2)^2 + (b^2-c^2)^2 \\ \qquad + 4(a^2+d^2)(b^2+c^2)]\,r^4 - (d^2-a^2)^2(b^2-c^2)^2 = 0. \end{array}\right.$$

La permutation tournante des lettres a, b, c donnerait de semblables équations en s et t.

Si l'on pose

$$\pm(a-d) = \alpha, \quad \pm(b-c) = \beta, \quad a+d=\gamma, \quad b+c=\delta,$$

en choisissant les signes de manière à rendre α, β positifs, on a d'abord

$$\begin{array}{ll} 2(a^2+d^2) = \alpha^2+\gamma^2, & 2(b^2+c^2) = \beta^2+\delta^2, \\ (d^2-a^2)^2 = \alpha^2\gamma^2, & (b^2-c^2)^2 = \beta^2\delta^2, \end{array}$$

ce qui change l'équation (c) en

$$(d)\left\{\begin{array}{l} 3r^8 - 2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)\,r^6 \\ \quad + (\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\alpha^2\delta^2+\beta^2\gamma^2+\beta^2\delta^2+\gamma^2\delta^2)\,r^4 \\ \quad - \alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2 = 0, \end{array}\right.$$

qui revient à

$$(e)\left\{\begin{array}{l} Q = r^2(r^2-\alpha^2)(r^2-\beta^2)(r^2-\gamma^2) + r^2(r^2-\alpha^2)(r^2-\beta^2)(r^2-\delta^2) \\ \quad + r^2(r^2-\alpha^2)(r^2-\gamma^2)(r^2-\delta^2) + r^2(r^2-\beta^2)(r^2-\gamma^2)(r^2-\delta^2) \\ \quad - (r^2-\alpha^2)(r^2-\beta^2)(r^2-\gamma^2)(r^2-\delta^2) = 0. \end{array}\right.$$

Si dans cette équation on met pour r^2

$$-\infty, \quad 0, \quad \alpha^2, \quad \beta^2, \quad \gamma^2, \quad \delta^2,$$

on voit que Q prend les signes

$$+,\quad -,\quad -,\quad +,\quad -1,\quad +,$$

de sorte qu'il y a une valeur de r^2 tombant entre $-\infty$ et o, c'est-à-dire négative, et trois valeurs positives, l'une entre α^2 et β^2, la seconde entre β^2 et γ^2, la troisième entre γ^2 et δ^2.

Par exemple, si les nombres positifs

$$\pm(c-b),\quad \pm(d-a),\quad b+c,\quad a+d$$

sont rangés par ordre de grandeur, la valeur de r tombera entre $d-a$ et $b+c$, comme le montrerait la figure.

Quand deux des quatre quantités a, b, c, d sont égales, b et c par exemple, ou d et a, l'équation (c) s'abaisse au second degré et la construction est géométrique.

5. *III^e Solution.* — La forme (e), la plus commode pour la discussion, se présente tout de suite quand on considère les triangles formés par b, c, r et a, d, r comme perpendiculaires.

Soient t et t' les aires de ces triangles : le volume du parallélipipède est $\frac{2t \times 2t'}{r}$, il faut donc rendre $\frac{t^2t'^2}{r^2}$ maximum. Or on a

$$4t^2 = 4b^2c^2 - (b^2+c^2-r^2)^2 = [(b+c)^2 - r^2][r^2-(b-c)^2],$$
$$4t'^2 = 4a^2d^2 - (a^2+d^2-r^2)^2 = [(a+d)^2 - r^2][r^2-(a-d)^2],$$

d'où l'on tire

$$\frac{16t^2t'^2}{r^2} = \frac{(r^2-\alpha^2)(r^2-\beta^2)(r^2-\gamma^2)(r^2-\delta^2)}{r^2}.$$

Si l'on prend la dérivée par rapport à r en l'égalant à zéro, on aura l'équation (e) qui revient à $Q = 0$.

III.

6. Si l'on coupe le tétraèdre, dont les arêtes sont $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, par un plan perpendiculaire à OA, les hauteurs des deux parallélogrammes qui ont OA pour base commune seront $b \sin z$, $c \sin y$, et comme elles font l'angle X, l'aire de la section droite sera $bc \sin y \sin z \sin X$, par conséquent le volume V du parallélipipède sera

$$V = abc \sin x \sin y \sin z \frac{\sin Z}{\sin z};$$

en posant

$$k = \frac{\sin X}{\sin x} = \frac{\sin Y}{\sin y} = \frac{\sin Z}{\sin z},$$

on aura donc

$$V^2 = a^2 b^2 c^2 . \sin^2 x \sin^2 y \sin^2 z . k^2,$$

d'où l'on tire

$$V^4 = (bc \sin x)^2 (ca \sin y)^2 (ab \sin z)^2 \sin^2 x \sin^2 y \sin^2 z . k^4,$$

ou

$$V^4 = a_1^2 b_1^2 c_1^2 \sin^2 X \sin^2 Y \sin^2 Z \left(\frac{1}{k}\right)^2,$$

en représentant par a_1, b_1, c_1 les aires des trois faces du parallélipipède qui passent par le sommet O.

Or, si l'on regarde $a_1 b_1 c_1$ comme des lignes qui représentent les aires, en menant les droites OA', OB', OC' perpendiculaires aux plans BOC, COA, AOB, mais non du même côté que OA, OB, OC, on verra que ces lignes font entre elles des angles suppléments de ceux que font entre elles les faces de l'angle trièdre OABC, de sorte que si les perpendiculaires sont égales à a_1, b_1, c_1, la quantité V^4 sera égale à V'^2, V' étant le volume du parallélipipède dont les arêtes sont $OA' = a_1$, $OB' = b_1$, $OC' = c_1$.

L'équation $V' = V^2$ montre que quand le premier parallélipipède atteint son maximum, il en est de même du second, et par conséquent aussi du tétraèdre OA'B'C' qui en est la sixième partie, ou encore les tétraèdres OABC, OA'B'C' atteignent ensemble leur maximum.

Or, les plans diagonaux du premier parallélipipède sont respectivement perpendiculaires aux arêtes A'B', B'C', C'A', savoir: le plan DOC à A'B', le plan DOA à B'C' et le plan DOB à C'A'. En effet, si l'on coupe le parallélipipède perpendiculairement à l'arête OA, on formera une section droite *oadb*, dont les côtés *oa*, *ob* et la diagonale *od* seront proportionnels aux aires des faces du parallélipipède et de son parallélogramme diagonal passant par O. Or si, dans le plan de la section droite *oadb*, on mène à *oa* une perpendiculaire $oa' = oa$ et à *ob* une perpendiculaire $ob' = ob$, de sorte que l'angle $a'ob'$ soit supplément de *aob*, le parallélogramme $oa'd'b'$ sera égal au parallélogramme *oadb*, et sa diagonale $a'b'$ sera égale et perpendiculaire à *od*. De là on conclut que le plan diagonal est perpendiculaire à $a'b'$. Il en serait encore de même si l'on remplaçait oa', ob' par des droites proportionnelles. On voit donc que les plans diagonaux, qui dans le parallélipipède primitif passent par le point O, sont respectivement perpendiculaires aux côtés A'B', B'C', C'A' du triangle A'B'C'. Ils sont donc perpendiculaires à A'B'C' et leur intersection OD l'est aussi.

Comme pour le cas du maximum du premier parallélipipède les plans diagonaux sont perpendiculaires aux faces opposées, il s'ensuivra que dans le second parallélipipède les arêtes OA', OB', OC' sont perpendiculaires aux droites A'B', B'C', C'A'. Autrement le tétraèdre OA'B'C' a ses arêtes opposées perpendiculaires entre elles.

Si, par le point O, on menait perpendiculairement aux faces A'OB', B'OC', C'OA' des perpendiculaires, elles coïncideraient avec OA, OB, OC, et si on les prenait proportionnelles aux aires des faces des parallélogrammes qui ont pour côtés OA′, OB′, OC′, elles seraient égales à a, b, c multipliées par le facteur constant V. Puisqu'elles sont proportionnelles à a, b, c, on conclurait, comme plus haut, que OD′ est perpendiculaire à ABC. Maintenant on peut considérer la face ABC comme la somme algébrique des trois projections des faces OAB, OAC, OBC sur ABC, mais OD′ est aussi la somme algébrique des projections de OA′, OB′, OC′ sur OD′. Donc OD′ est proportionnelle à ABC. Donc en menant des plans perpendiculaires à OA′, OB′, OC′, OD′, on a un tétraèdre dont les faces ont des aires données proportionnelles aux lignes OA′, OB′, OC′, OD′. De ce tétraèdre on passera à un autre dont les faces auront précisément les aires demandées. Au lieu de ce tétraèdre on pourra prendre le tétraèdre symétrique. Il est facile de voir que ce qui précède s'accorde avec la Note de M. Paul Serret (*Nouvelles Annales*, 1863, p. 79). Cette Note a pour objet d'établir une corrélation qui n'est autre au fond que la précédente.

On pourrait développer davantage ce qui concerne les parallélipipèdes OABCD, OA′B′C′D′; mais cela a déjà été fait. On n'a mis ici que ce qui est nécessaire pour bien montrer la corrélation des deux questions, objets de cette Note.

Si l'on prolongeait OD′ de OD″ = OD′, le tétraèdre A′B′C′D″ serait le tétraèdre dérivé des aires dont s'est occupé M. Painvin dans le dernier paragraphe du Mémoire déjà cité. Sa théorie est-elle bien nouvelle, et ne pourrait-elle pas s'établir d'une manière plus simple? On peut se proposer d'établir par la Géométrie et la Trigonométrie élémentaires les propriétés géométriques du tétraèdre OABC à volume maximum, et où OA, OB, OC, OG ont des valeurs données (G est le centre de gravité), et du tétraèdre OABC à volume maximum dont les faces ont des aires données. Cette marche est sans doute plus simple que l'emploi des déterminants.

IV.

Second problème.

7. On suppose les arêtes opposées d'un tétraèdre perpendiculaires entre elles. Si les arêtes issues du point O sont a, b, c, faisant les angles $\mathrm{BOC} = x$, $\mathrm{COA} = y$, $\mathrm{AOB} = z$, les arêtes opposées étant perpendiculaires, il faut que les perpendiculaires abaissées de B, C, ($\mathrm{OB} = b$, $\mathrm{OC} = c$) sur OA aient le même pied. Ainsi

$$b \cos z = c \cos y \quad \text{ou} \quad \frac{\cos y}{b} = \frac{\cos z}{c}.$$

Le système

$$\frac{\cos x}{a} = \frac{\cos y}{b} = \frac{\cos z}{c}$$

exprime donc la perpendicularité des arêtes opposées; il revient à

$$bc \sin x \cot x = ac \sin y \cot y = ab \sin z \cot z,$$

ou

$$a_1 \cot x = b_1 \cot y = c_1 \cot z,$$

ou encore

$$a_1 \frac{\cos x}{\sin \mathrm{X}} = b_1 \frac{\cos y}{\sin \mathrm{Y}} = c_1 \frac{\cos z}{\sin \mathrm{Z}},$$

ou bien

$$a_1 \sin \mathrm{Y} \sin \mathrm{Z} \cos x = b_1 \sin \mathrm{X} \sin \mathrm{Z} \cos y = c_1 \sin \mathrm{X} \sin \mathrm{Y} \cos z,$$

ou enfin

$$\begin{aligned} a_1 (\cos \mathrm{Y} \cos \mathrm{Z} - \cos \mathrm{X}) &= b_1 (\cos \mathrm{Z} \cos \mathrm{X} - \cos \mathrm{Y}) \\ &= c_1 (\cos \mathrm{X} \cos \mathrm{Y} - \cos \mathrm{Z}). \end{aligned}$$

Ces équations sont toutes semblables à celles du premier système.

Si l'on représente par d_1 l'aire de la quatrième face, on trouve comme il suit l'équation

$$d_1^2 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + 2b_1c_1\cos X + 2c_1a_1\cos Y + 2a_1b_1\cos Z,$$

qui revient à

$$d_1^2 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - 2b_1c_1\cos(b_1, c_1) \\ - 2c_1a_1\cos(c_1, a_1) - 2a_1b_1\cos(a_1, b_1).$$

C'est une conséquence des équations suivantes, d'où nous ôtons les indices pour abréger :

$$\begin{aligned} a &= b\cos(a, b) + c\cos(a, c) + d\cos(a, d), \\ b &= c\cos(b, c) + a\cos(b, a) + d\cos(b, d), \\ c &= a\cos(c, a) + b\cos(c, b) + d\cos(c, d), \\ d &= a\cos(d, a) + b\cos(d, b) + c\cos(d, c). \end{aligned}$$

De là

$$d^2 = ad\cos(d, a) + bd\cos(d, b) + cd\cos(d, c);$$

mais les équations précédentes donnent

$$\begin{aligned} ad\cos(a, d) &= a^2 - ab\cos(a, b) - ac\cos(a, c), \\ bd\cos(b, d) &= b^2 - bc\cos(b, c) - ba\cos(b, a), \\ cd\cos(c, d) &= c^2 - ca\cos(c, a) - cb\cos(c, b); \end{aligned}$$

d'où pour d^2 la valeur

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2bc\cos(b, c) - 2ca\cos(c, a) - 2ab\cos(a, b).$$

Cette démonstration est sans doute connue. Si l'on mettait cette valeur sous la forme

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2bc\cos(b, c) - 2a[c\cos(c, a) + b\cos(a, b)]$$

ou

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2bc\cos(b, c) - 2a[a - d\cos(a, d)],$$

on aurait

$$d^2 + a^2 - 2ad\cos(a, d) = b^2 + c^2 - 2bc\cos(b, c),$$

équation connue, et qui a différentes significations géométriques, soit comme double valeur du carré d'une diagonale d'un quadrilatère gauche, soit comme double valeur du carré de l'aire d'un parallélogramme diagonal dans un parallélipipède.

Ainsi l'on voit, par ce qui précède, que les équations du second problème sont précisément les mêmes que celles du premier.

8. Si l'on remarque que l'on a

$$k^2 = \frac{\sin^2 X}{\sin^2 x} = \frac{1 - \cos^2 X}{\sin^2 x}$$
$$= \frac{1 - \cos^2 x - \cos^2 y - \cos^2 z + 2\cos x \cos y \cos z}{\sin^2 x \sin^2 y \sin^2 z},$$

et que, de même,

$$\frac{1}{k^2} = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 X} = \frac{1 - \cos^2 x}{\sin^2 X}$$
$$= \frac{1 - \cos^2 X - \cos^2 Y - \cos^2 Z + 2\cos X \cos Y \cos Z}{\sin^2 X \sin^2 Y \sin^2 Z},$$

on aura

$$V^2 = a^2 b^2 c^2 (1 - \cos^2 x - \cos^2 y - \cos^2 z + 2\cos x \cos y \cos z),$$

et

$$V^4 = a_1^2 b_1^2 c_1^2 (1 - \cos^2 X - \cos^2 Y - \cos^2 Z + 2\cos X \cos Y \cos Z).$$

Si l'on remplace a_1, b_1, c_1 par $2a'$, $2b'$, $2c'$, a', b', c' étant les aires des faces du tétraèdre dont le volume T est donné par l'équation $V = 6T$, il viendra

$$(6T)^4 = 4^3 a'^2 b'^2 c'^2$$
$$\times (1 - \cos^2 X - \cos^2 Y - \cos^2 Z + 2\cos X \cos Y \cos Z).$$

Donc, si l'on veut avoir le maximum de V et de T, en ayant égard aux relations

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2\,bc\cos x + 2\,ca\cos y + 2\,ab\cos z,$$

$$d'^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2 + 2\,b'c'\cos X + 2\,c'a'\cos Y + 2\,a'b'\cos Z,$$

le calcul différentiel donnera immédiatement

$$\frac{\cos y\cos z - \cos x}{bc} = \frac{\cos z\cos x - \cos y}{ca} = \frac{\cos x\cos y - \cos z}{ab},$$

$$\frac{\cos Y\cos Z - \cos X}{b'c'} = \frac{\cos Z\cos X - \cos Y}{c'a'} = \frac{\cos X\cos Y - \cos Z}{a'b'},$$

qui sont précisément les équations trouvées plus haut par des considérations géométriques.