

HIOUX

BODEMER

Théorèmes sur les surfaces du second ordre

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 2
(1863), p. 426-432

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__426_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

THÉORÈMES SUR LES SURFACES DU SECOND ORDRE;

PAR M. HIOUX,
Répétiteur au lycée Bonaparte,
ET M. BODMER,
Professeur au lycée de Caen.

I. *Étant donnée une surface du second ordre S, si, d'un point fixe P, on mène trois droites parallèles à un système de diamètres conjugués d'une surface du second ordre à centre, qui rencontrent la surface S en trois points A, B, C, le lieu du pôle M du plan ABC par rapport à cette surface est une surface du second ordre S'.*

Prenons pour surface à centre un ellipsoïde E, et pour axes coordonnés les axes $2a$, $2b$, $2c$ de cette surface directrice.

Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point P;

$$(1) \quad \begin{cases} f = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy \\ \quad + 2Cx + 2C'y + 2C''z + 1 = 0 \end{cases}$$

l'équation de la surface S.

Le plan de pôle M (α, β, γ) a pour équation

$$(2) \quad V = \alpha f' + \beta f'' + \gamma f''' + 2C\alpha + 2C'\beta + 2C''\gamma + z = 0.$$

Concevons le cône qui a pour sommet le point P et

pour directrice la courbe définie par les équations (1) et (2). En exprimant que ce cône admet comme génératrices les trois droites PA, PB, PC parallèles à trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde E, nous aurons une relation entre les coordonnées α , β , γ du point M, qui sera l'équation du lieu S'.

Pour obtenir l'équation du cône en question, transportons l'origine au point P. Les équations (1) et (2) deviennent

$$\begin{aligned} Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2B'yz + 2B'xz + 2B''xy \\ + xf'x_1 + yf'y_1 + zf'z_1 + f_1 = 0, \\ xf'\alpha + yf'\beta + zf'\gamma + V_1 = 0. \end{aligned}$$

Les équations d'une génératrice du cône sont de la forme

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n} = \rho.$$

En combinant ces équations avec les précédentes, on obtient

$$\begin{aligned} \rho^2(A l^2 + A' m^2 + A'' n^2 + 2B mn + 2B' ln + 2B'' lm) \\ + \rho(lf'x_1 + mf'y_1 + nf'z_1) + f_1 = 0, \\ \rho(lf'\alpha + mf'\beta + nf'\gamma) + V_1 = 0, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit l'équation de condition

$$\begin{aligned} V_1^2(A l^2 + A' m^2 + A'' n^2 + 2B mn + 2B' ln + 2B'' lm) \\ - V_1(lf'x_1 + mf'y_1 + nf'z_1)(lf'\alpha + mf'\beta + nf'\gamma) \\ + f_1(lf'\alpha + mf'\beta + nf'\gamma)^2 = 0, \end{aligned}$$

qui exprime que la génératrice rencontre la directrice.

L'élimination de l , m , n entre cette équation et celles de la génératrice donne pour l'équation du cône

$$(3) \left\{ \begin{aligned} & V_1^2(Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2B'yz + 2B'xz + 2B''xy) \\ & - V_1(xf'x_1 + yf'y_1 + zf'z_1)(xf'\alpha + yf'\beta + zf'\gamma) \\ & + f_1(xf'\alpha + yf'\beta + zf'\gamma)^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Remarquons que cette équation est de la forme

$$Mx^2 + M'y^2 + M''z^2 + 2Nyz + 2N'xz + 2N''xy = 0,$$

puisque l'origine est au sommet du cône.

Soient maintenant

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{l'} = \frac{z}{l''}, \quad \frac{x}{m} = \frac{y}{m'} = \frac{z}{m''}, \quad \frac{x}{n} = \frac{y}{n'} = \frac{z}{n''},$$

les équations des droites PA, PB, PC.

En exprimant qu'elles sont des génératrices du cône, nous aurons

$$(a) \begin{cases} Ml^2 + M'l'^2 + M''l''^2 + 2N'l'' + 2N'll'' + 2N''ll' = 0, \\ Mm^2 + \dots\dots\dots = 0, \\ Mn^2 + \dots\dots\dots = 0 \end{cases}$$

D'un autre côté, les trois plans diamétraux de l'ellipsoïde E

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

conjugués des directions PA, PB, PC, ont pour équations

$$\begin{aligned} \frac{lx}{a^2} + \frac{l'y}{b^2} + \frac{l''z}{c^2} &= 0, \\ \frac{mx}{a^2} + \frac{m'y}{b^2} + \frac{m''z}{c^2} &= 0, \\ \frac{nx}{a^2} + \frac{n'y}{b^2} + \frac{n''z}{c^2} &= 0; \end{aligned}$$

l'équation de l'ellipsoïde peut, par suite, se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} K^2 \left(\frac{lx}{a^2} + \frac{l'y}{b^2} + \frac{l''z}{c^2} \right)^2 + K'^2 \left(\frac{mx}{a^2} + \frac{m'y}{b^2} + \frac{m''z}{c^2} \right)^2 \\ + K''^2 \left(\frac{nx}{a^2} + \frac{n'y}{b^2} + \frac{n''z}{c^2} \right)^2 = 1, \end{aligned}$$

et l'on a par identification les six relations

$$\begin{aligned}
& K^2 l^2 + K'^2 m^2 + K''^2 n^2 = a^2, \\
& K^2 l'^2 + \dots = b^2, \\
& K^2 l''^2 + \dots = c^2, \\
& K^2 ll' + K'^2 mm' + K''^2 nn' = 0, \\
& K^2 ll'' + K'^2 mm'' + \dots = 0, \\
& K^2 l'l'' + \dots = 0 \text{ (*)}.
\end{aligned}$$

Il en résulte qu'en ajoutant les équations (a) après les avoir multipliées respectivement par K^2 , K'^2 , K''^2 , il vient

$$a^2 M + b^2 M' + c^2 M'' = 0.$$

Remplaçons enfin M , M' , M'' par leurs valeurs tirées de (3) et nous aurons

$$(4) \quad \begin{cases} a^2 [AV_1^2 - V_1 f' x_1 f' \alpha + f_1 (f' \alpha)^2] \\ + b^2 [A'V_1^2 - V_1 f' y_1 f' \epsilon + f_1 (f' \epsilon)^2] \\ + c^2 [A''V_1^2 - V_1 f' z_1 f' \gamma + f_1 (f' \gamma)^2] = 0; \end{cases}$$

c'est l'équation du lieu.

Il suffit de remarquer que V_1 , $f' \alpha$, $f' \epsilon$, $f' \gamma$ sont des fonctions linéaires de α , ϵ , γ , pour reconnaître que cette équation représente une surface du second ordre.

COROLLAIRE I. — *L'enveloppe du plan ABC est une surface du second ordre, polaire réciproque de S' par rapport à S.*

COROLLAIRE II. — *Le lieu des points d'où l'on peut*

(*) Si l'on désigne par a' , b' , c' les demi-diamètres conjugués de l'ellipsoïde E, parallèles à PA, PB, BC, on sait qu'on a les six relations

$$\begin{aligned}
& a'^2 l^2 + b'^2 m^2 + c'^2 n^2 = a^2, & a'^2 ll' + b'^2 mm' + c'^2 nn' = 0, \\
& a'^2 l'^2 + \dots = b^2, & a'^2 ll'' + \dots = 0, \\
& a'^2 l''^2 + \dots = c^2, & a'^2 l'l'' + \dots = 0,
\end{aligned}$$

ce qui donne la signification des quantités K , K' , K'' .

mener à une surface du second ordre trois tangentes parallèles à un système de diamètres conjugués d'une surface du second ordre à centre, est une surface du second ordre.

Supposons en effet le point P choisi de telle sorte que les trois droites PA, PB, PC soient tangentes à la surface S, le point M viendra se confondre avec le point P. Remplaçons donc dans (4) α, β, γ par x_1, y_1, z_1 ; remarquons que V_1 devient alors égal à $2f_1$, et nous trouverons que les coordonnées x_1, y_1, z_1 du point P doivent satisfaire à l'équation de condition

$$f_1[4f_1(Aa^2 + A'b^2 + A''c^2) - (a^2f'_1x_1^2 + b^2f'_1y_1^2 + c^2f'_1z_1^2)] = 0,$$

qui conduit aux deux solutions

$$(5) \quad \begin{cases} f_1 = 0, \\ \begin{cases} 4f_1(Aa^2 + A'b^2 + A''c^2) \\ - (a^2f'_1x_1^2 + b^2f'_1y_1^2 + c^2f'_1z_1^2) = 0. \end{cases} \end{cases}$$

La première est étrangère à la question et la seconde représente une surface du second ordre.

COROLLAIRE III. — *Quand la surface directrice est une sphère, on conclut de ce qui précède que :*

1° *Si l'on mène d'un point fixe P trois droites rectangulaires qui percent une surface du second ordre en trois points A, B, C, le lieu du pôle M du plan ABC, par rapport à cette surface, est une surface du second ordre ;*

2° *Le lieu des points d'où l'on peut mener à une surface du second ordre trois tangentes rectangulaires est une surface du second ordre.*

Il suffit de faire $a = b = c$ dans les résultats précédents, pour obtenir les équations qui conviennent à ce cas particulier.

Remarque. — La surface S' est réelle ou imaginaire suivant la position du point P. Le lieu représenté par l'équation (5) partage l'espace en deux régions telles, que, pour tout point P pris dans l'une, la surface S' est réelle, tandis qu'elle est imaginaire pour tout point P pris dans l'autre.

II. Si le point M (α, β, γ) est supposé fixe, l'équation (4) représente le lieu des points P répondant à ce théorème :

Étant donnés une surface du second ordre S et un cône circonscrit de sommet M (α, β, γ), si on imagine des cônes ayant pour directrice la courbe de contact ABC et admettant trois génératrices parallèles à un système de diamètres conjugués d'une surface du second ordre à centre, le lieu des sommets P de ces cônes est une surface du second ordre S' .

L'équation (4) peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} HV_1^2 - (a^2 f' \alpha f' x_1 + b^2 f' \beta f' y_1 + c^2 f' \gamma f' z_1) V_1 \\ + f_1 (a' f' x^2 + b^2 f' \beta^2 + c^2 f' \gamma^2) = 0, \end{aligned}$$

en posant

$$A a^2 + A' b^2 + A'' c^2 = H.$$

La surface S'_1 coupe la surface S suivant deux courbes situées dans les plans

$$(6) \quad V_1 = 0,$$

$$(7) \quad HV_1 - (a^2 f' \alpha f' x_1 + b^2 f' \beta f' y_1 + c^2 f' \gamma f' z_1) = 0.$$

Le plan (6), $V_1 = 0$, est le plan ABC de pôle M; son équation peut s'écrire

$$\alpha f' x_1 + \beta f' y_1 + \gamma f' z_1 + 2cx_1 + 2c'y_1 + 2c''z_1 + 2 = 0.$$

Le plan (7) passe par une droite DE, intersection des

plans

$$(6) \quad v_1 = 0,$$

$$(8) \quad a^2 f' \alpha f' x_1 + b^2 f' \epsilon f' \gamma_1 + c^2 f' \gamma f' z_1 = 0.$$

Si l'on met l'équation du plan (7) sous la forme .

$$\left(\alpha - \frac{a^2 f' \alpha}{H} \right) f' x_1 + \left(\epsilon - \frac{b^2 f' \epsilon}{H} \right) f' \gamma_1 + \left(\gamma - \frac{c^2 f' \gamma}{H} \right) f' z_1 \\ + 2 c x_1 + 2 c' \gamma_1 + 2 c'' z_1 + 2 = 0,$$

on voit que le pôle N de ce plan a pour coordonnées

$$x_1 = \alpha - \frac{a^2 f' \alpha}{H}, \quad \epsilon_1 = \epsilon - \frac{b^2 f' \epsilon}{H}, \quad \gamma_1 = \gamma - \frac{c^2 f' \gamma}{H}.$$

La droite MN, qui passe par les pôles M et N des deux plans (6) et (7), est la polaire conjuguée de l'intersection DE de ces deux plans, par rapport à la surface S. Elle a pour équation

$$(9) \quad \frac{x - \alpha_1}{a^2 f' \alpha} = \frac{y - \epsilon_1}{b^2 f' \epsilon} = \frac{z - \gamma_1}{c^2 f' \gamma}.$$

Cette droite MN est conjuguée du plan (8) par rapport à la surface S, et du plan (6) par rapport à l'ellipsoïde E.

La droite MN perce la surface S aux points F, L; les plans (6), (7) et (8) aux points H, K, O. Les six points M, F, H, K, L, N sont en involution, et le centre d'involution est le point O.

Les plans passant par DE et chacun de ces points forment un faisceau de six plans en involution; le plan central d'involution est le plan (8).

(La fin prochainement.)