HAAG

Solution géométrique de la question 644

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 2 (1863), p. 415-417

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__415_1>

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA QUESTION 644;

PAR M. HAAG,
Élève de Mathématiques spéciales du lycée Saint-Louis
(classe de M. Briot).

ÉNONCÉ. — *On sait que le cercle osculateur en un point quelconque* A *d'une parabole coupe cette courbe en un second point* B; démontrer :

1° *Que la droite* AB *et toutes les droites analogues sont tangentes à une même parabole;*

2° *Que le lieu géométrique des milieux des cordes telles que* AB *est une parabole.*

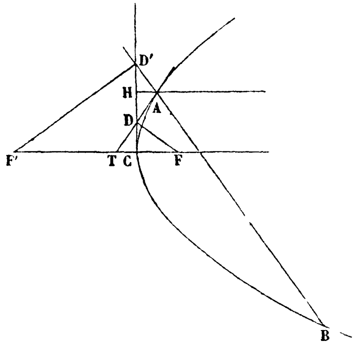
Lemme. — Si un cercle coupe une section conique en quatre points A, B, C, D, les bissectrices des angles que font entre eux deux côtés opposés du quadrilatère de ces quatre points sont parallèles aux axes de la courbe. (La démonstration de ce théorème se trouve dans les *Annales de Mathématiques de Gergonne*.)

Corollaire. — Supposons que les deux points C et D se rapprochent du point A jusqu'à coïncider avec lui : le cercle sera osculateur à la conique, l'angle des côtés AB, CD deviendra l'angle de AB avec la tangente AT, et, d'après le théorème précédent, les bissectrices de cet angle devront être parallèles aux axes de la conique.

Démonstration des deux théorèmes énoncés.

1° Menons la tangente au sommet C de la parabole (*fig.* 1), et désignons par D, H et D′ les points où elle

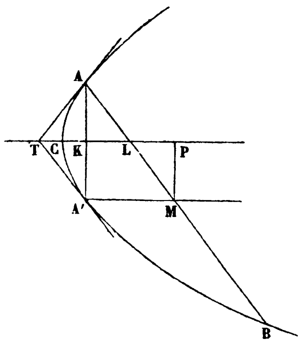
Fig. 1.



rencontre la tangente AT, le diamètre AH du point A, et la corde AB. En D′ élevons une perpendiculaire à AB, et soit F′ son point d'intersection avec l'axe. Joignons encore FD et remarquons que cette droite est perpendiculaire à AT. AH étant une bissectrice de l'angle DAD′ (d'après le lemme), l'égalité des angles DAH, D′AH en résulte; mais ces angles sont respectivement égaux aux angles CDF, CD′F′, car ils ont deux à deux leurs côtés perpendiculaires et dirigés dans le même sens. Donc les angles CDF, CD′F′ sont aussi égaux, et les triangles rectangles DCF, D′CF′ sont semblables. Mais CD = DH d'après une propriété de la parabole, et DH = D′H, parce que le triangle DAD′ est isocèle; donc CD′ = 3CD, et comme les triangles DCF, D′CF′ sont semblables, CF′ sera aussi égal à 3CF. Le point F′ est donc un point fixe, et l'on voit alors que toutes les droites telles que AB sont tangentes à une même parabole dont F' est le foyer et C le sommet. Le paramètre de cette parabole est triple de celui de la parabole donnée.

2° Par le point T (*fig.* 2), où la tangente en A ren-

Fig. 2.



contre l'axe, menons la seconde tangente TA' à la parabole. A et A' sont deux points symétriques par rapport à l'axe, et, d'après le lemme, TA' est une parallèle à AB. Le milieu M de la corde AB se trouvera donc au point d'intersection de cette corde avec le diamètre du point A'. Appelons K et L les points où AA' et AB rencontrent l'axe. La perpendiculaire MP, abaissée du point M sur l'axe, est égale à A'K et par suite à AK : on en conclut que les longueurs KL, LP sont aussi égales, et comme, dans le triangle isocèle TAL, $KL = TK = 2CK$, il en résulte que $CP = 5CK$. Alors

$$\frac{\overline{MP}^2}{CP} = \frac{\overline{AK}^2}{5CK} = \text{constante}.$$

Le lieu du point M est une parabole ayant encore même axe et même sommet que la parabole donnée, mais dont le paramètre est cinq fois moindre.