NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GUSTAVE DUBOIS

Extension d'un théorème de Monge

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 2 (1863), p. 398-400
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__398_0>

EXTENSION D'UN THEORÈME DE MONGE;

PAR M. GUSTAVE DUBOIS,
Professeur de Mathematiques.

THÉORÈME. — *Le lieu des sommets des angles trièdres circonscrits à un paraboloïde du second ordre* S, *et dont les faces sont parallèles à trois plans diamétraux conjugués d'une surface à centre du second ordre* S', *est un plan parallèle au plan diamétral de* S' *conjugué des cordes parallèles à l'axe du paraboloïde* S.

Soit

$$\frac{y^2}{2p} + \frac{z^2}{2q} + x = 0$$

l'équation du paraboloïde S.

On n'ôtera rien à la généralité de la question en supposant que la surface S' a son centre à l'origine, et que par conséquent son équation est

$$(1)\quad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = 1.$$

Cela posé, soient

$$p = lx + l'y + l''z = 0,$$
$$q = mx + m'y + m''z = 0,$$
$$r = nx + n'y + n''z = 0,$$

les équations de trois plans diamétraux conjugués de la surface S'; on pourra mettre l'équation de cette surface sous la forme

$$Kp^2 + K'q^2 + K''r^2 = 1.$$

En identifiant avec l'équation (1), on trouve les équations de condition :

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} Kl^2 + K'm^2 + K''n^2 = A, \\ Kl'^2 + K'm'^2 + K''n'^2 = A', \\ Kl''^2 + K'm''^2 + K''n''^2 = A'', \\ Kl'l'' + K'm'm'' + K''n'n'' = B, \\ Kll'' + K'mm'' + K''nn'' = B', \\ Kll' + K'mm' + K''nn' = B''. \end{array}\right.$$

Maintenant, les équations des plans tangents à S et parallèles à $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$, sont :

$$lx + l'y + l''z = \frac{pl'^2 + ql''^2}{2l},$$

$$mx + m'y + m''z = \frac{pm'^2 + qm''^2}{2m},$$

$$nx + n'y + n''z = \frac{pn'^2 + qn''^2}{2n},$$

ce qu'on peut écrire :

$$2l^2x + 2ll'y + 2ll''z = pl'^2 + ql''^2,$$
$$2m^2x + 2mm'y + 2mm''z = pm'^2 + qm''^2,$$
$$2n^2x + 2nn'y + 2nn''z = pn'^2 + qn''^2.$$

Si l'on ajoute, après avoir multiplié respectivement par K, K′, K″, on trouve, en tenant compte des conditions (2),

$$(3)\qquad 2Ax + 2B''y + 2B'z = pA' + qA'' :$$

c'est l'équation d'un plan parallèle au plan diamétral de S′ conjugué des cordes parallèles à la droite

$$\left\{\begin{array}{l} y = 0, \\ z = 0, \end{array}\right.$$

qui n'est autre que l'axe du paraboloïde S.

Corollaire. — Le lieu des sommets des angles trièdres trirectangles circonscrits à un paraboloïde est un plan perpendiculaire à l'axe de ce paraboloïde.

Car, si la surface S' devient une sphère, l'équation du plan (3) se réduit à

$$x = \frac{p+q}{2}.$$

Dans le cas du paraboloïde de révolution, on trouve

$$x = p;$$

dans le cas du paraboloïde hyperbolique équilatère, on trouve

$$x = 0.$$

Scolie. — Pour que le plan (3) soit perpendiculaire à l'axe du paraboloïde, il suffit que la surface S' ait l'un de ses axes parallèle à l'axe du paraboloïde.