Nouvelles annales de mathématiques

Durrande

Note sur une propriété des lignes de courbure des surfaces du second ordre à centre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 2 (1863), p. 362-367

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__362_1>

NOTE

Sur une propriété des lignes de courbure des surfaces du second ordre à centre;

Par M. DURRANDE,
Professeur au lycée de Moulins.

Théorème. — *Les plans tangents à une surface du second ordre à centre, parallèles aux plans des sections diamétrales dont un des axes est constant, touchent la surface suivant une de ses lignes de courbure.*

(Je démontre ce théorème pour l'ellipsoïde, mais on appliquera, sans difficulté, la démonstration aux autres surfaces à centre.)

J'établis d'abord les trois lemmes suivants :

Lemme I. — *L'intersection d'un ellipsoïde représenté par l'équation*

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

et d'une sphère

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

est une conique sphérique située sur le cône

$$(2)\qquad \frac{a^2-R^2}{a^2}x^2+\frac{b^2-R^2}{b^2}y^2+\frac{c^2-R^2}{c^2}z^2=0.$$

Lemme II. — *Si, par un diamètre* OA *d'un ellipsoïde et par une tangente à la surface perpendiculaire à* OA, *on fait passer un plan diamétral, la droite* OA *est un axe de la section faite par ce plan dans l'ellipsoïde.*

Lemme III. — *Le cône représenté par l'équation* (2) *est l'enveloppe des sections diamétrales de l'ellipsoïde dont l'un des axes est constant et égal à* 2R.

Ce lemme est une conséquence bien simple du précédent; en effet, tout plan tangent au cône (2) contient un diamètre OA, génératrice du cône, et la tangente à la conique sphérique (1), (2) ; or, cette tangente est perpendiculaire à OA, rayon de la sphère, donc OA est un axe de la section elliptique faite par le plan tangent au cône (2) dans la surface (1).

Ces lemmes établis, proposons-nous de chercher le lieu des points de contact des plans tangents à l'ellipsoïde (1), parallèles aux plans tangents du cône (2).

Soient x', y', z' les coordonnées du point de contact de l'un d'eux; elles doivent satisfaire à l'équation

$$(3) \qquad \frac{x'x}{a^2} + \frac{y'y}{b^2} + \frac{z'z}{c^2} = 1$$

du plan tangent à l'ellipsoïde (1).

D'autre part, l'équation d'un plan tangent au cône (2) est

$$(4) \qquad \frac{a^2 - R^2}{a^2} x''x + \frac{b^2 - R^2}{b^2} y''y + \frac{c^2 - R^2}{c^2} z''z = 0,$$

x'', y'', z'' désignant les coordonnées d'un point quelconque de l'arête de contact.

Exprimons que les plans (3) et (4) sont parallèles, nous aurons les relations

$$\frac{a^2 - R^2}{a^2} x'' = \frac{x'}{a^2},$$

$$\frac{b^2 - R^2}{b^2} y'' = \frac{y'}{b^2},$$

$$\frac{c^2 - R^2}{c^2} z'' = \frac{z'}{c^2},$$

d'où l'on peut tirer les valeurs de x'', y'', z'' que l'on transportera dans l'équation

$$(5) \qquad \frac{a^2 - R^2}{a^2} x''^2 + \frac{b^2 - R^2}{b^2} y''^2 + \frac{c^2 - R^2}{c^2} z''^2 = 0,$$

obtenue en exprimant que les coordonnées x'', y'', z'' satisfont à l'équation du cône (2).

L'élimination de x'', y'', z'' entre les quatre équations précédentes fournit l'équation suivante :

$$(6) \qquad \frac{x'^2}{a^2(a^2 - R^2)} + \frac{y'^2}{b^2(b^2 - R^2)} + \frac{z'^2}{c^2(c^2 - R^2)} = 0,$$

laquelle contient le lieu que nous cherchons. L'équation (6) est celle d'un cône, lieu des positions des diamètres conjugués des sections diamétrales dont l'un des axes est égal à $2R$.

Pour mettre en évidence la nature du lieu géométrique que je cherche, je remarque que dans le système des équations

$$(7) \quad \begin{cases} \dfrac{x'^2}{a^2} + \dfrac{y'^2}{b^2} + \dfrac{z'^2}{c^2} = 1, \\ \dfrac{x'^2}{a^2(a^2 - R^2)} + \dfrac{y'^2}{b^2(b^2 - R^2)} + \dfrac{z'^2}{c^2(c^2 - R^2)} = 0 \end{cases}$$

qui le définissent, on peut remplacer l'une des équations par une autre obtenue en retranchant la seconde de la première, ce qui donne

$$(8) \qquad \frac{x'^2}{a^2 - R^2} + \frac{y'^2}{b^2 - R^2} + \frac{z'^2}{c^2 - R^2} = 1.$$

Cette équation (8), avec la première du groupe (7), donne le lieu cherché.

Or, il est facile de voir, en supprimant les accents devenus inutiles, que la première équation du groupe (7) est celle de l'ellipsoïde proposé; l'équation (8) est celle d'un hyperboloïde homofocal coupant, par suite, orthogonalement l'ellipsoïde proposé. *Donc l'intersection de ces deux surfaces est une ligne de courbure sur chacune d'elles, ce qui démontre le théorème énoncé.*

Remarque. — Soient R, R' les deux demi-axes d'une section faite dans un ellipsoïde par un plan diamétral; a, b, c les trois demi-axes principaux; si a est le plus grand, c le plus petit, si en outre R est plus grand que R', on aura les inégalités

$$a > R > b > R' > c.$$

Il résulte du théorème précédent que les deux lignes de courbure qui passent au point de contact du plan tangent parallèle au plan diamétral (R, R′) seront données par les équations

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\\ &\frac{x^2}{a^2-R^2}+\frac{y^2}{b^2-R^2}+\frac{z^2}{c^2-R^2}=1,\\ &\frac{x^2}{a^2-R'^2}+\frac{y^2}{b^2-R'^2}+\frac{z^2}{c^2-R'^2}=1,\end{aligned}\right.$$

qui représentent trois surfaces homofocales et faisant partie d'un système triple de surfaces orthogonales. Il est aisé de reconnaître que la première étant un ellipsoïde, la seconde est un hyperboloïde à deux nappes, et la troisième un hyperboloïde à une nappe.

Corollaire. — Si on prend les pôles des plans tangents à un ellipsoïde, par rapport à un autre ellipsoïde dont les axes soient les inverses des moyennes proportionnelles des axes du premier pris deux à deux, on a la conséquence suivante :

Le lieu des pôles des plans qui touchent l'ellipsoïde aux divers points d'une ligne de courbure est une conique sphérique située sur le cône asymptote de l'hyperboloïde homofocal qui détermine la ligne de courbure.

Le plan tangent à l'ellipsoïde représenté par la première des équations (9) a pour équation

$$(10)\qquad \frac{x'x}{a^2}+\frac{y'y}{b^2}+\frac{z'z}{c^2}=1,$$

x', y', z' étant les coordonnées du point de contact.

Désignons par ξ, η, ζ les coordonnées du pôle de ce plan par rapport à l'ellipsoïde

$$(11)\qquad bcx^2+acy^2+abz^2=1,$$

dont les axes sont les inverses des moyennes géométriques des axes du premier pris deux à deux.

On sait que les coordonnées du pôle d'un plan par rapport à une surface du second ordre (11) permettent d'écrire l'équation de ce plan sous la forme

$$bc\xi x + ac\eta y + ab\zeta z = 1. \tag{12}$$

Si les équations (10) et (12) représentent le même plan, on doit avoir les relations

$$\frac{x'}{a^2} = bc\xi, \quad \frac{y'}{b^2} = ac\eta, \quad \frac{z'}{c^2} = ab\zeta.$$

Si l'on tire de ces relations les valeurs de x', y', z', et qu'on les porte dans les deux premières équations du groupe (9) par exemple, ce qui exprime que le point (x', y', z') décrit une ligne de courbure de l'ellipsoïde, on en déduit

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{1}{a^2 b^2 c^2}, \tag{13}$$

ce qui montre que le pôle (ξ, η, ζ) se déplace sur une sphère; on a de plus par la seconde équation

$$\frac{a^2\xi^2}{a^2 - R^2} + \frac{b^2\eta^2}{b^2 - R^2} + \frac{c^2\zeta^2}{c^2 - R^2} = \frac{1}{a^2 b^2 c^2},$$

d'où, en retranchant de la précédente,

$$\frac{\xi^2}{a^2 - R^2} + \frac{\eta^2}{b^2 - R^2} + \frac{\zeta^2}{c^2 - R^2} = 0, \tag{14}$$

équation du cône asymptote de l'hyperboloïde représenté par la seconde équation du groupe (9).

Donc le lieu des pôles (ξ, η, ζ) est représenté par l'ensemble des équations (13) et (14). C. Q. F. D.