

BAEHR

**Note sur une question de géométrie
de l'espace**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 2
(1863), p. 35-47

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2_35_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR UNE QUESTION DE GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE;

PAR M. BAEHR,
Professeur à Groningue.

Dans le tome XI, pages 66 et suivantes des *Nouvelles Annales*, M. Dieu remarque que si $X dx + Y dy + Z dz$ est une différentielle exacte à trois variables, un système de droites qui ont leurs origines ou points de départ sur une surface donnée S, et dont les directions sont déterminées en fonctions des coordonnées de leurs origines par les *cosinus* X, Y, Z, peut être coupé normalement par une autre surface, quelle que soit d'ailleurs la surface S.

En cherchant à expliquer cette propriété particulière au système, on trouve que, dans le cas dont il s'agit, on peut prendre l'origine de chaque droite en un point quelconque de sa direction, c'est-à-dire que les *cosinus* X, Y, Z, ne changent pas de valeurs si à x, y, z , on substitue $x + pX, y + pY, z + pZ$, p étant une longueur arbitraire; de sorte qu'ici le système des droites est en effet indépendant de la surface S.

De plus, posant

$$X dx + Y dy + Z dz = dF(x, y, z),$$

on obtiendra la surface normale aux droites, si l'on prend

sur chacune d'elles, à partir du point où elle perce la surface S et du même côté, une longueur r donnée par l'intégrale de l'équation (3), page 67 (*), d'où

$$r = -F(x, y, z) + \text{const.}$$

Et si l'on donne de même à x, y, z , les accroissements pX, pY, pZ , la fonction F deviendra $F + p$; par conséquent r diminuera de p ; de sorte que, pour une même valeur de la constante dans l'intégrale, on retombera toujours sur la même surface normale aux droites, quelles que soient leurs origines.

En effet, remarquant bien que X, Y, Z , ne sont pas simplement proportionnels aux *cosinus* qui déterminent la direction d'une droite, mais qu'ils sont ces cosinus eux-mêmes, on obtiendra en différentiant $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ successivement par rapport à x, y, z , et en ayant égard aux conditions

$$\frac{dX}{dy} = \frac{dY}{dx}, \quad \frac{dX}{dz} = \frac{dZ}{dx}, \quad \frac{dY}{dz} = \frac{dZ}{dy},$$

qui expriment que $Xdx + Ydy + Zdz$ est une différentielle exacte,

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} X \frac{dX}{dx} + Y \frac{dX}{dy} + Z \frac{dX}{dz} = 0, \\ X \frac{dY}{dx} + Y \frac{dY}{dy} + Z \frac{dY}{dz} = 0, \\ X \frac{dZ}{dx} + Y \frac{dZ}{dy} + Z \frac{dZ}{dz} = 0. \end{array} \right.$$

Mais, pour des accroissements quelconques de x, y, z , la fonction X devient

$$X + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{1.2.3\dots n} \left(\frac{dX}{dx} \Delta x + \frac{dX}{dy} \Delta y + \frac{dX}{dz} \Delta z \right)^n,$$

(*) Cette équation est $dr + Xdx + Ydy + Zdz = 0$ (t. XI, p. 67).

si, dans le développement des puissances du trinôme, on change $(dX)^n$ en $d^n X$. On voit d'abord que le premier terme du développement, celui qu'on obtiendrait pour $n = 1$, s'évanouit, en vertu de la première des équations (1), si les accroissements Δx , Δy , Δz , sont proportionnels à X , Y , Z ; il est facile de démontrer que la même chose arrive alors pour les termes suivants.

En effet, différentiant la première des équations (1) successivement par rapport à x , y , z , on a

$$\begin{aligned} X \frac{d^2 X}{dx^2} + Y \frac{d^2 X}{dx dy} + Z \frac{d^2 X}{dx dz} \\ + \frac{dX}{dx} \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dx} \frac{dX}{dy} + \frac{dZ}{dx} \frac{dX}{dz} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X \frac{d^2 X}{dy dx} + Y \frac{d^2 X}{dy^2} + Z \frac{d^2 X}{dy dz} \\ + \frac{dX}{dy} \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} \frac{dX}{dy} + \frac{dZ}{dy} \frac{dX}{dz} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X \frac{d^2 X}{dx dz} + Y \frac{d^2 X}{dy dz} + Z \frac{d^2 X}{dz^2} \\ + \frac{dX}{dz} \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dz} \frac{dX}{dy} + \frac{dZ}{dz} \frac{dX}{dz} = 0; \end{aligned}$$

multipliant ces résultats respectivement par X , Y , Z , ajoutant les produits, en ayant égard aux trois équations (1) et écrivant dX^2 pour indiquer $d^2 X$, on obtient l'équation symbolique

$$\left(X \frac{dX}{dx} + Y \frac{dX}{dy} + Z \frac{dX}{dz} \right)^2 = 0,$$

qui fait voir que le second terme du développement précédent s'évanouit en même temps que le premier. La même chose aura lieu pour les termes suivants, de sorte que X s'accroît de zéro. Il en est de même des accroissements de Y et de Z .

La fonction F devient, symboliquement, si l'on donne à x, y, z , des accroissements, arbitraires

$$F + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{1.2.3\dots n} \left(\frac{dF}{dx} \Delta x + \frac{dF}{dy} \Delta y + \frac{dF}{dz} \Delta z \right)^n.$$

Mais, remarquant que

$$\frac{dF}{dx} = X, \quad \frac{dF}{dy} = Y, \quad \frac{dF}{dz} = Z,$$

et que

$$\begin{aligned} \frac{d^2 F}{dx dy} &= \frac{dX}{dy} = \frac{dY}{dx}, \\ \frac{d^2 F}{dx dz} &= \frac{dX}{dz} = \frac{dZ}{dx}, \\ \frac{d^2 F}{dz dy} &= \frac{dY}{dz} = \frac{dZ}{dy}; \end{aligned}$$

le développement réel pourra être mis sous la forme

$$\begin{aligned} &F + (X \Delta x + Y \Delta y + Z \Delta z) \\ &+ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dX}{dx} \Delta x + \frac{dX}{dy} \Delta y + \frac{dX}{dz} \Delta z \right) \Delta x \right. \\ &\quad + \left(\frac{dY}{dx} \Delta x + \frac{dY}{dy} \Delta y + \frac{dY}{dz} \Delta z \right) \Delta y \\ &\quad \left. + \left(\frac{dZ}{dx} \Delta x + \frac{dZ}{dy} \Delta y + \frac{dZ}{dz} \Delta z \right) \Delta z \right] + \dots, \end{aligned}$$

ce qui, en vertu des équations (1), se réduit à

$$F + p(X^2 + Y^2 + Z^2) \quad \text{ou} \quad F + p,$$

si l'on prend les accroissements de x, y, z , respectivement égaux à pX, pY, pZ . Donc la fonction F s'accroît de p , et r de $-p$.

On peut arriver aux mêmes résultats plus généralement et sans le secours de la série de Taylor.

Les fonctions X, Y, Z satisfaisant toujours à l'équation

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1,$$

où a , lorsque $X dx + Y dy + Z dz$ est la différentielle d'une certaine fonction φ de x, y, z , l'équation aux *différentielles partielles*

$$(2) \quad \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 = 1,$$

dont

$$\varphi = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

où a, b, c sont des constantes, est une *solution complète*, de laquelle on peut déduire toutes les fonctions possibles qui satisfont à l'équation (2). Car, si $F(x, y, z)$ est une telle fonction, on peut d'abord lui donner la forme de φ , en déterminant a, b, c , qui alors deviennent des fonctions de variables, par les équations

$$(3) \quad F \frac{dF}{dx} = (x-a), \quad F \frac{dF}{dy} = (y-b), \quad F \frac{dF}{dz} = (z-c),$$

dont la somme des carrés donne en effet

$$F^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2.$$

Par la différentiation on a alors

$$F dF = (x-a)(dx-da) + (y-b)(dy-db) + (z-c)(dz-dc).$$

Mais, si l'on multiplie les équations (3), respectivement par dx, dy, dz , la somme des produits donne aussi

$$F \cdot dF = (x-a)dx + (y-b)dy + (z-c)dz;$$

de sorte que si F satisfait à l'équation (2), les fonctions a, b, c déterminées par les équations (3) seront toujours

telles, qu'on a identiquement

$$(4) \quad (x - a)da + (y - b)db + (z - c)dc = 0,$$

ce qui, en exceptant le cas où l'on aurait $x = a$, $y = b$, $z = c$ qui donnerait $F = 0$, et celui où a , b , c restent constantes, qui revient à la solution complète, ne peut avoir lieu à moins que deux des quantités a , b , c ne soient des fonctions de la troisième, ou que l'une d'elles ne soit une fonction des deux autres.

Soit dans le premier cas

$$a = \psi(c), \quad b = \psi_1(c);$$

ψ , ψ_1 désignant des fonctions prises arbitrairement, et ψ' , ψ'_1 leurs dérivées, l'équation (4) devient

$$(5) \quad [x - \psi(c)]\psi'(c) + [y - \psi_1(c)]\psi'_1(c) + (z - c) = 0,$$

et donnera

$$c = f(x, y, z) = f,$$

et par suite

$$a = \psi(f), \quad b = \psi_1(f).$$

La substitution de ces valeurs dans les équations (3) donne

$$(6) \quad X = \frac{dF}{dx} = \frac{x - \psi(f)}{F}, \quad Y = \frac{y - \psi_1(f)}{F}, \quad Z = \frac{z - f}{F}.$$

D'après cela, il est facile de démontrer que la valeur de c , et par suite celles de a et b , ne changent pas lorsqu'on donne à x, y, z , les accroissements pX, pY, pZ . Car, au lieu de faire cette substitution dans $c = f(x, y, z)$, on peut la faire dans l'équation (5) elle-même, qui détermine c pour des valeurs quelconques des variables. On obtient alors

$$\left. \begin{aligned} & [x - \psi(c)]\psi'(c) + [y - \psi_1(c)]\psi'_1(c) + (z - c) \\ & + \frac{p}{F} \{ [x - \psi(f)]\psi'(c) + [y - \psi_1(f)]\psi'_1(c) + (z - f) \} \end{aligned} \right\} = 0,$$

(41)

équation à laquelle on satisfait de nouveau par

$$c = f(x, y, z),$$

parce qu'elle devient alors le résultat de la substitution de $c = f$ dans l'équation (5), multipliée par $1 + \frac{p}{F}$.

Pour ces mêmes accroissements des variables, $(x - a)$ devient, en remarquant que a ne change pas,

$$x + pX - a, \quad \text{ou} \quad (x - a) + p \frac{x - a}{F} = (x - a) \left(1 + \frac{p}{F} \right), \dots$$

De sorte que $F = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}$ deviendra $F \left(1 + \frac{p}{F} \right)$ ou $F + p$.

$$\text{Tandis que } X \text{ devient } \frac{(x - a) \left(1 + \frac{p}{F} \right)}{F + p} \quad \text{ou} \quad \frac{x - a}{F}.$$

C'est-à-dire que F s'accroît de p , tandis que X, Y, Z restent les mêmes.

Dans le second cas, si l'on pose

$$c = \psi(a, b),$$

ψ désignant une fonction prise à volonté, l'équation (4) se partage dans les deux suivantes :

$$(7) \quad (x - a) + (z - \psi) \frac{d\psi}{da} = 0, \quad (y - b) + (z - \psi) \frac{d\psi}{db} = 0;$$

et ces dernières déterminent a, b , et par suite c en fonction de x, y, z . On verra, comme dans le premier cas, que ces valeurs ne changent pas, si l'on donne aux variables des accroissements proportionnels à X, Y, Z ; ce qui mène ensuite aux mêmes résultats que dans le premier cas.

Soit, par exemple,

$$F = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2) - (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2}.$$

En supposant

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

la fonction F satisfait à l'équation (2). Alors les équations (3) sont, en posant, pour abrégé,

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = P,$$

$$x - P \cos\alpha = x - a, \quad y - P \cos\beta = y - b, \quad z - P \cos\gamma = z - c,$$

Donc

$$a = P \cos\alpha, \quad b = P \cos\beta, \quad c = P \cos\gamma.$$

De sorte qu'on a ici un exemple du premier cas, savoir

$$a = \psi(c) = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} c, \quad b = \psi'(c) = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} c.$$

On vérifie aisément que $c = P \cos\gamma$ ne change pas, si l'on substitue à x, y, z les valeurs $x + pX, y + pY, z + pZ$, c'est-à-dire

$$(m) \quad \begin{cases} x + p \left(\frac{x - P \cos\alpha}{F} \right), \\ y + p \left(\frac{y - P \cos\beta}{F} \right), \\ z + p \left(\frac{z - P \cos\gamma}{F} \right). \end{cases}$$

Puis on vérifiera aussi aisément que F devient $F + p$, et que X, Y, Z ne changent pas pour ces nouvelles valeurs des variables.

Si l'on part des valeurs précédentes de a et b en fonction de c , afin de déduire de la solution complète la fonction F que nous avons prise pour exemple, l'équation (5) qui détermine c en fonction de x, y, z , donnera

$$\left(x - c \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} \right) \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} + \left(y - c \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} \right) \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} + (z - c) = 0,$$

et par suite

$$c = P \cos\gamma.$$

Cette équation ne change pas et donne, par conséquent, la même valeur pour c , si à x, y, z on substitue les valeurs (m), continuant à y considérer c comme l'inconnue à déterminer pour ces nouvelles valeurs des variables.

Soit, pour avoir un exemple du second cas,

$$F = \sin \alpha \sqrt{x^2 + y^2} + z \cos \alpha,$$

qui satisfait encore à l'équation (2).

Après une simple réduction et posant

$$\cos \alpha \sqrt{x^2 + y^2} - z \sin \alpha = P,$$

les équations (3) donneront

$$a = \frac{x P \cos \alpha}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad b = \frac{y P \cos \alpha}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad c = -P \sin \alpha,$$

de sorte qu'on a ici

$$c = \psi(a, b) = -\operatorname{tang} \alpha \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Si à x, y, z on substitue $x + pX, y + pY, z + pZ$, c'est-à-dire

$$(n) \quad x + p \frac{x \sin \alpha}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad y + p \frac{y \sin \alpha}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad z + p \cos \alpha,$$

on vérifie aisément que X, Y, Z ne changent pas, tandis que F devient $F + p$.

Si l'on part de la valeur précédente de c en fonction de a et b , les équations (7) deviennent

$$(x - a) - (z - \psi) \frac{a \operatorname{tang} \alpha}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0,$$

$$(y - b) - (z - \psi) \frac{b \operatorname{tang} \alpha}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0;$$

d'où premièrement $ay - bx = 0$. Ensuite on en déduira, après quelques réductions, les valeurs précédentes de a, b, c , en fonctions de x, y, z . Puis, si on y substitue à x, y, z les valeurs (n), continuant à considérer a et b

comme des inconnues à déterminer pour ces nouvelles valeurs de x, y, z , les premiers membres augmentent respectivement des termes

$$\rho \sin \alpha \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right],$$

$$\rho \sin \alpha \left[\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right],$$

qui s'avanouissent quand on donne à a, b les mêmes valeurs que celles trouvées d'abord. En sorte que les valeurs de a et b ne changent pas pour les nouvelles valeurs de x, y, z .

Pour obtenir les surfaces normales aux droites déterminées par les fonctions cosinus, X, Y, Z , il faudra éliminer x, y, z des équations (1) de l'article cité plus haut (*), c'est-à-dire des équations

$$\xi - x = (-F + C) \frac{dF}{dx},$$

$$\eta - y = (-F + C) \frac{dF}{dy},$$

$$\zeta - z = (-F + C) \frac{dF}{dz},$$

lesquelles, dans le premier cas, en vertu des relations (6), se réduisent à

$$(\mu) \left\{ \begin{array}{l} \xi - \psi(f) = \frac{C}{F} [x - \psi(f)], \\ \eta - \psi_1(f) = \frac{C}{F} [y - \psi_1(f)], \\ \zeta - f = \frac{C}{F} (z - f). \end{array} \right.$$

Or, si l'on multiplie la première et la seconde de ces

(*) Les équations (1) dont il s'agit sont (t. XI, p. 66) :

$$\xi - x = rX, \quad \eta - y = rY, \quad \zeta - z = rZ.$$

dernières équations respectivement par $\psi'(f)$ et $\psi_1'(f)$, la somme des produits et de la troisième donne, en vertu de la relation (5),

$$[\xi - \psi(f)]\psi'(f) + [\eta - \psi_1(f)]\psi_1'(f) + \zeta - f = 0,$$

où ψ et ψ_1 sont des fonctions connues en f ; de sorte qu'on peut tirer de cette équation f , c'est-à-dire $f(x, y, z)$ en fonction de ξ, η, ζ , et comme l'équation (5) a donné, d'après ce qui précède,

$$c = f(x, y, z),$$

celle-ci donnera évidemment

$$f(x, y, z) = f(\xi, \eta, \zeta).$$

Ainsi, dans les premiers membres des équations (p), on peut changer x, y, z en ξ, η, ζ , parce que ces variables n'y entrent que sous le signe f ; et après cela on élimine x, y, z de ces équations en prenant la somme de leurs carrés, ce qui donnera

$$[\xi - \psi(f)]^2 + [\eta - \psi_1(f)]^2 + (\zeta - f)^2 = C^2,$$

dont le premier membre n'est autre chose que le carré de la fonction F , où l'on a changé x, y, z en ξ, η, ζ .

On trouvera, d'une manière analogue, que de même dans le second cas l'équation de la surface normale est

$$F^2 = C^2, \quad \text{ou} \quad (\xi - a)^2 + (\eta - b)^2 + (\zeta - c)^2 = C^2,$$

où l'on suppose que dans les fonctions a, b, c on a substitué ξ, η, ζ à x, y, z .

Si l'on prend la constante C égale à zéro, on aura, dans le premier cas, au lieu d'une surface une ligne normale, parce que $C = 0$ exige que chacun des trois termes de la somme des carrés soit séparément nul, et que les trois équations qu'on obtient ainsi se réduisent évidemment aux deux équations

$$\xi = \psi(\zeta), \quad \eta = \psi_1(\zeta).$$

Dans le second cas, ces trois équations se réduisent à

$$\zeta = \psi(\xi, \eta)$$

qui représente une surface ; l'une des trois équations

$$\xi = a, \quad \eta = b, \quad \zeta = c,$$

donnera également l'équation de cette surface.

Ces conclusions générales sont vérifiées par les deux exemples précédents.

On voit facilement que, dans le premier, le système de droites déterminées par les fonctions X, Y, Z qui se déduisent de F , est composé des perpendiculaires menées de chaque point de l'espace sur une droite passant par l'origine et faisant avec les axes des angles α, β, γ . Le lieu normal à ces droites est généralement une surface cylindrique dont cette droite est l'axe, et qui devient cet axe lui-même lorsque le rayon du cylindre, c'est-à-dire la constante dans l'équation générale, est zéro.

Dans le second exemple, le système consiste en des droites menées de chaque point de l'espace à l'axe des z sous l'angle α ; le lieu normal est toujours un cône droit et circulaire, qui a son sommet à l'origine lorsque la constante est zéro, et on verra que, dans ce cas, l'équation de cette surface est en effet indifféremment $F = 0$, $\xi = a, \eta = b, \zeta = c$, en se rappelant que dans les valeurs de a, b, c , il faut changer x, y, z en ξ, η, ζ .

Note du Rédacteur. — Le remarquable article de M. Baehr se rapporte à la question suivante, proposée au Concours d'agrégation (année 1849) :

Étant données une surface, et par chaque point de cette surface une droite qui fait avec les axes rectangulaires des coordonnées des angles dont les cosinus sont des fonctions continues des coordonnées de ce point,

trouver la condition pour qu'il existe une surface normale à toutes ces droites.

La solution en a été donnée par M. Dieu (t. XI, p. 66-70). La condition cherchée consiste en ce que, si X, Y, Z représentent les cosinus en fonction des coordonnées :

Il faut et il suffit que le trinôme $Xdx + Ydy + Zdz$ satisfasse à la condition connue d'intégrabilité des différentielles à trois variables, et que le facteur propre à le rendre intégrable soit, en vertu de l'équation de la surface donnée, une fonction de l'intégrale. G.
