Nouvelles annales de mathématiques

Émile Dupuy

Théorème

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 2 (1863), p. 346-347

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__346_0>

THÉORÈME

Démontré par M. Émile DUPUY,
Élève de M. V. H., à la pension de Lafilolie.

Étant donné un cercle dont le centre est O *et le rayon* R, *on prend sur un diamètre* COD *la distance* OQ *égale au côté du carré inscrit, et, par le point* Q, *on conduit une sécante quelconque* QAB, *rencontrant la circonférence aux points* A, B. *Puis, aux points* A, B, *on élève à la sécante des perpendiculaires, et on projette le centre* O *sur ces perpendiculaires, en* M *et* N : *le lieu géométrique de ces projections est une ligne telle, que le produit des distances de chacun de ses points à deux points fixes est constant.*

Soit

$$OQ' = OQ = R\sqrt{2},$$

et soient F et F′ les milieux de OQ et de OQ′; je dis que les points fixes F, F′ sont tels, que le produit $MF \times MF'$ est constant.

En effet, les triangles QOM, Q′OM donnent, d'après un théorème connu,

$$OM^2 + MQ^2 = 2MF^2 + 2OF^2,$$
$$OM^2 + MQ'^2 = 2MF'^2 + 2OF'^2.$$

D'où

$$(1) \qquad 2MF^2 = OM^2 + MQ^2 - 2OF^2,$$
$$(2) \qquad 2MF'^2 = OM^2 + MQ'^2 - 2OF'^2.$$

Mais

$$2OF^2 = 2OF'^2 = R^2.$$

D'ailleurs,

$$MQ^2 = AM^2 + AQ^2 = R^2 - OM^2 + AQ^2;$$

substituant dans l'égalité (1), il vient

$$2MF^2 = AQ^2.$$

On a de même

$$2MF'^2 = BQ^2.$$

Par suite

$$2MF \times MF' = QA \times QB = R^2,$$

d'où

$$MF \times MF' = \frac{R^2}{2}, \text{ quantité constante.}$$