

C. GEOFFROY

L. L'HUILIER

Solution de la question 642 (Catalan)

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 2
(1863), p. 337-339

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2_337_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 642 (CATALAN);

PAR MM. C. GEOFFROY ET L. L'HUILIER,
Elèves du lycée de Nancy.

Discuter la fonction

$$y = \frac{(1 + x + x^2 + \dots + x^n)^2}{1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n}}.$$

En égalant à zéro la dérivée de y , on trouve l'équation

$$1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n} - (n + 1)x^n = 0;$$

trouver les racines réelles de cette équation.

x étant supposé compris entre $+1$ et -1 , développer y en série ordonnée suivant les puissances de x .

La fonction y se met sous la forme

$$y = \frac{x + 1}{x - 1} \cdot \frac{x^{n+1} - 1}{x^{n+1} + 1},$$

et sa dérivée

$$y' = 2 \frac{(1+x)}{1-x} \cdot \frac{[1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n} - (n+1)x^n]}{(x^{n+1} + 1)^2}.$$

Je discuterai d'abord la dérivée en supposant successivement n pair et n impair.

Soit

$$N = 1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n} - (n + 1)x^n.$$

1° Dans le cas de n pair, l'équation $N = 0$ admet les racines $+1$ et -1 : elle les admet chacune deux fois ; car $+1$ et -1 rendent nulle la dérivée de N ; mais elle ne les admet pas plus de deux fois, car l'équation $N = 0$ n'a que deux variations.

$\varphi(x)$ désignant le quotient $\frac{N}{(1-x)^2(1+x)^2}$, on donne à la dérivée la forme

$$y' = 2 \cdot \frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{(1-x)^2(1+x)^2\varphi(x)}{(x^{n+1}+1)^2} = 2 \cdot \frac{(1-x)(1+x)^3\varphi(x)}{(x^{n+1}+1)^2};$$

$(n+1)$ est impair, donc $(x^{n+1}+1)^2$ est divisible par $(x+1)^2$, et y' est nul pour $x = 1$ et $x = -1$.

2° Quand n est impair, l'équation $N = 0$ n'admet plus la racine -1 ; mais comme $(x^{n+1}+1)$ n'est plus divisible par $(x+1)$, on est encore conduit à ce résultat, que y' est nul pour $x = \pm 1$.

Cela posé, on voit que, pour $x = 0$, y est égal à 1, et y' est positif et égal à 2. y va donc en croissant jusqu'à son maximum $(n+1)$ qui correspond à la racine $x = 1$ de la dérivée y' . La dérivée devient alors négative, et y diminue en tendant vers l'unité. Du côté des x négatifs, y diminue d'abord, passe par un minimum correspondant à $x = -1$ et augmente ensuite en tendant vers l'unité.

On peut remarquer que les valeurs de y correspondant à deux valeurs de x égales et de signes contraires sont inverses l'une de l'autre quand n est impair.

Développement de y en série. y se développe en série par suite des transformations suivantes :

$$\begin{aligned} y &= \frac{x^{n+2} + x^{n+1} - x - 1}{x^{n+1} - x^{n+1} + x - 1} = 1 + \frac{2x(x^n - 1)}{(x-1)(x^{n+1}+1)} \\ &= 1 + \frac{2x(1+x+\dots+x^{n-1})}{x^{n+1}+1}. \end{aligned}$$

Quand x est compris entre 1 et -1 , on a

$$\frac{1}{x^{n+1}+1} = 1 - x^{n+1} + x^{2(n+1)} - x^{3(n+1)} + \dots,$$

donc

$$y = 1 + 2x(1+x+\dots+x^{n-1})[1 - x^{n+1} + x^{2(n+1)} - x^{3(n+1)} + \dots].$$

(339)

Note. — La même question a été résolue par M. Pel-
letereau, élève du lycée de Poitiers, et par M. de Virieu.
