Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 2 (1863), p. 329-332

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__329_0>

CORRESPONDANCE.

1. M. Ange Le Taunéac fait remarquer que la méthode employée par M. Taillier, pour trouver la développée de l'ellipse (p. 143), s'applique avec la même facilité à la recherche de l'*enveloppe d'une droite inscrite à un angle droit*, à la détermination de l'*enveloppe des ellipses décrites par les points de cette même droite*, etc. Dans le cas de l'ellipse, on écrit ordinairement ainsi l'équation (1) (p. 143),

$$\frac{by}{\sin\varphi} - \frac{ax}{\cos\varphi} + c^2 = 0;$$

on obtient alors, en prenant la dérivée,

$$\frac{by\cos\varphi}{\sin^2\varphi} + \frac{ax\sin\varphi}{\cos^2\varphi} = 0,$$

ou plutôt

$$\frac{by}{\sin^3\varphi} = -\frac{ax}{\cos^3\varphi};$$

d'où l'on conclut, par les propriétés des proportions,

$$\frac{(by)^{\frac{2}{3}}}{\sin^2 x} = \frac{(ax)^{\frac{2}{3}}}{\cos^2\varphi} = \frac{(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}}}{1},$$

etc.

2. A propos du même article, M. H. Delorme fait observer qu'une méthode tout à fait semblable peut être employée pour trouver la développée de l'hyperbole. En effet, un point de cette courbe est défini par les équations

$$x = \frac{a}{\cos\varphi}, \quad y = b\,\mathrm{tang}\,\varphi.$$

L'équation d'une normale est alors

$$\frac{by}{\cos\varphi} + ax\,\mathrm{tang}\,\varphi = c^2\,\frac{\mathrm{tang}\,\varphi}{\cos\varphi},$$

d'où

$$by + ax\sin\varphi = c^2\,\mathrm{tang}\,\varphi.$$

On a, en prenant la dérivée,

$$ax\cos\varphi = \frac{c^2}{\cos^2\varphi} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\cos\varphi} = \left(\frac{ax}{c^2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

En divisant par $\mathrm{tang}\,\varphi$ l'équation de la normale et prenant de nouveau la dérivée, on aura facilement

$$\mathrm{tang}\,\varphi = -\left(\frac{by}{c^2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Or,

$$\frac{1}{\cos^2\varphi} - \mathrm{tang}^2\varphi = 1,$$

donc

$$\left(\frac{ax}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{by}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

sera l'équation de la développée de l'hyperbole.

3. M. Caspari, ingénieur-hydrographe, ancien élève de l'École Polytechnique, nous communique deux formules sur les rayons de courbure. Si on appelle ρ le rayon de courbure d'une courbe de l'espace; ρ' le rayon de courbure de sa projection orthogonale; ω l'angle du plan osculateur de la première courbe et du plan de projection; u l'angle de la tangente avec sa projection; ν l'angle de cette tangente avec l'intersection des plans, on a

$$(1) \qquad \frac{\rho}{\rho'} = \left(\frac{1 - \sin^2\omega\sin^2\nu}{\cos\omega}\right)^{\frac{3}{2}},$$

$$(2) \qquad \rho' = \rho \frac{\cos^3 u}{\cos \omega}.$$

L'une de ces formules se déduit de l'autre au moyen de la relation qui existe entre u et v.

La formule (2) se déduit d'une formule plus générale donnée par M. Peaucellier (t. XX, p. 422), et qui exprime une relation entre les rayons de courbure d'une courbe quelconque, et celui de sa perspective, en deux points correspondants. C'est ainsi que M. Caspari établit sa formule, dont il donne d'ailleurs une démonstration directe.

Une ellipse étant considérée comme la projection d'un cercle, si $2a$ et $2b$ sont les axes, on aura

$$\cos\omega = \frac{b}{a}, \quad \rho = \frac{a^2}{b}\cos^3 u.$$

On sait d'un autre côté qu'en désignant par i l'angle de la normale avec le rayon vecteur, on a

$$\rho \cos^3 i = \frac{b^2}{a},$$

donc

$$a \cos i \cos u = b,$$

relation entre u et i qui conduit à la propriété suivante.

Sur le grand axe d'une ellipse pris pour diamètre décrivons un cercle : soient M un point du cercle et M′ le point correspondant de l'ellipse. Du point T, où les tangentes au cercle et à l'ellipse menées respectivement par les points M et M′ rencontrent le grand axe, décrivons un cercle, avec le rayon $\frac{b}{a}$ MT : les deux rayons vecteurs du point M′ seront tangents à ce cercle.

4. Une personne qui ne signe que de ses initiales s'est proposée de démontrer qu'*un triangle dont deux bissec-*

trices sont égales est isocèle, question déjà traitée dans le Journal. Le tour de démonstration employé est fort ingénieux, mais on y suppose que trois droites sont parallèles quand elles divisent deux autres droites en parties proportionnelles, ce qui n'est pas.

Si les personnes qui nous adressent des communications non signées nous donnaient leur nom et leur adresse, en exprimant le désir que leur nom ne parût pas dans le Journal, nous nous conformerions religieusement à leur intention; mais nous pourrions leur faire part de notre sentiment sur quelques-unes de leurs communications, qui nous paraissent susceptibles de corrections ou de modifications.

5. Nous avons reçu de plusieurs élèves des réponses à des questions posées par le Journal. Nous les remercions de leur précieuse collaboration et nous prendrons à l'avenir des mesures pour que l'insertion de leurs travaux ne souffre pas de retard. Nous les prions seulement de vouloir bien se conformer aux recommandations suivantes :

1° Écrire toujours en tête le numéro et l'énoncé complet de la question qu'ils résolvent.

2° Mettre sur des feuilles séparées la solution de chaque question, afin que nous puissions réunir celles qui portent le même numéro.

3° Écrire lisiblement, correctement, et avec la plus grande clarté. Quelques communications ont dû être laissées de côté parce que, pour être présentées à nos lecteurs, elles auraient exigé une nouvelle rédaction. Nous voulons bien corriger par-ci par-là quelques négligences de style, mais nous ne pouvons pas refondre les articles qui nous sont envoyés. Le temps dont nous disposons ne suffirait pas à un pareil travail. P.