

POUDRA

**Lieu des sommets des cônes du second degré
qui passent par six points donnés**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 2
(1863), p. 307-310

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2_307_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**LIEU DES SOMMETS DES CONES DU SECOND DEGRÉ
QUI PASSENT PAR SIX POINTS DONNÉS;**

PAR M. POUDRA.

Cherchons d'abord l'équation de la surface conique qui passerait par cinq points 1, 2, 3, 4, 5 donnés et aurait pour sommet un point t .

Soient :

$a = 0$	l'équation du plan passant par les trois points	1, 2, t ,
$b = 0$	" "	2, 3, t ,
$c = 0$	" "	1, 4, t ,
$d = 0$	" "	3, 4, t ,

alors l'équation

$$a \cdot d - \lambda \cdot b \cdot c = 0$$

est celle du cône du second degré, ayant le point t pour sommet, et passant par les quatre arêtes d'intersection dont les équations sont :

$$a = 0 \begin{cases} b = 0, \\ c = 0, \end{cases} \quad \text{et} \quad d = 0 \begin{cases} b = 0, \\ c = 0. \end{cases}$$

Cette équation du cône renferme une indéterminée λ qui servira à faire passer ce cône par le point 5 donné. Pour cela, appelons a' , b' , c' , d' ce que deviennent respective-

ment a, b, c, d , lorsqu'à la place de x, y, z que ces polynômes renferment, on y met les valeurs des coordonnées de ce cinquième point. On aura donc

$$a'.d' - \lambda.b'.c' = 0, \quad \text{d'où} \quad \lambda = \frac{a'.d'}{b'.c'},$$

et, par suite,

$$(1) \quad a.d.b'.c' - a'.d'.b.c = 0.$$

Telle est donc l'équation de la surface conique, ayant le point t pour sommet et passant par les cinq points donnés 1, 2, 3, 4, 5.

Si maintenant ce cône doit passer par le point 6, il faudra que les coordonnées de ce point 6 satisfassent à l'équation (1). Soient a'', b'', c'', d'' ce que deviennent respectivement a, b, c, d lorsqu'à la place de x, y, z , on substitue dans ces polynômes, pour x, y, z , les coordonnées du point 6; alors on doit avoir

$$(2) \quad a''.d'' b'.c' - a'.d'.b''.c'' = 0.$$

Dans cette équation, les coefficients sont des fonctions des coordonnées des différents points 1, 2, 3, 4, 5, 6 et de celles du sommet t que nous pouvons désigner par x', y', z' , et chacune entre au premier degré dans chaque facteur $a'', d'', b', c', a', d', b'', c''$.

Or, dans cette équation (2), on peut regarder les coordonnées x', y', z' du sommet comme étant les variables, et alors elle représentera le lieu des sommets des cônes du second degré qui passent par les six points donnés.

Cette équation sera évidemment du quatrième degré en x', y', z' ; ainsi le lieu des sommets des cônes du second degré qui passent par six points quelconques donnés est une surface du quatrième degré, dont l'équa-

tion est

$$a'' \cdot d'' \cdot b' \cdot c' - a' \cdot d' \cdot b'' \cdot c'' = 0.$$

Dans cette équation, il est évident que $a' = 0$ est l'équation du plan qui passe par les trois points 1, 2, 5; $b' = 0$ du plan 2, 3, 5; $c' = 0$ de 1, 4, 5; $d' = 0$ de 3, 4, 5; et $a'' = 0$ de 1, 2, 6; $b'' = 0$ de 2, 3, 6; $c'' = 0$ de 1, 4, 6; $d'' = 0$ de 3, 4, 6.

Donc cette surface du quatrième degré passe par les seize droites dont les équations seraient :

$$\begin{array}{l}
 a'' = 0 \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} a'' = 0, \\ d'' = 0, \\ b'' = 0, \\ c'' = 0; \end{array} \right. \quad d'' = 0 \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} a'' = 0, \\ d'' = 0, \\ b'' = 0, \\ c'' = 0; \end{array} \right. \\
 \\
 b' = 0 \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} a' = 0, \\ d' = 0, \\ b' = 0, \\ c' = 0; \end{array} \right. \quad c' = 0 \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} a' = 0, \\ d' = 0, \\ b' = 0, \\ c' = 0; \end{array} \right.
 \end{array}$$

qui sont quatre à quatre dans un même plan. Douze de ces droites sont celles qui joignent deux à deux les six points donnés et qui sont 12, 26, 16, 43, 36, 46, 25, 35, 23, 15, 45, 14; et ensuite les quatre droites

$$\left\{ \begin{array}{l} a'' = 0, \\ d' = 0; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} d'' = 0, \\ a' = 0; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} b' = 0, \\ c'' = 0; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} b'' = 0, \\ c' = 0. \end{array} \right.$$

Si, au lieu de partir des points 1, 2, 3, 4, nous eussions pris quatre autres des points donnés, nous aurions dû arriver à l'équation de la même surface; donc cette équation doit être satisfaite :

1° Par toutes les droites qui joignent deux à deux les six points donnés et qui sont au nombre de 15.

2° Par toutes les droites qui résultent des intersections de tous les plans qui passent par trois points différents, et

pris deux à deux ; or ces six points pris trois à trois donnent $\frac{6.5.4}{2.3} = 20$, d'où résultent six droites qui doivent faire partie de la surface.

Ainsi le total de ces droites qui sont sur cette surface est de 25. On conçoit très-bien que le lieu des sommets des cônes du second degré qui passent par six points doit contenir toutes les droites qui joignent deux à deux ces six points ; car si, sur une de ces droites, on prend un point quelconque pour sommet d'un cône du second degré passant par les cinq autres points, il passera bien par les six.

Pour concevoir comment les autres droites désignées ci-dessus font partie de la surface, il faut remarquer que deux plans quelconques peuvent être considérés comme formant, à eux deux, un cône du second degré, dont un point quelconque de leur intersection commune est le sommet : alors on conçoit comment les dix dernières droites ci-dessus sont sur la surface.

Le problème que nous venons de résoudre conduit à la solution de cette question : *Trouver les points qui seraient les sommets de trois cônes du second degré passant respectivement par trois groupes de six points donnés dans l'espace.* Ces points seront les intersections de trois surfaces du quatrième ordre ; par conséquent ils seront au nombre de $4.4.4 = 64$. Il donne aussi la solution de ce problème : *Trouver le lieu des sommets des cônes du second degré qui passent par sept points de l'espace,* et par suite de ce problème : *Trouver les sommets de ces cônes qui passent par huit points donnés.*

La méthode employée ci-dessus pour déterminer le lieu d'un point peut servir dans une infinité de cas.