EUGÈNE BELTRAMI

Remarques au sujet de la question 654

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 2 (1863), p. 302-307

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__302_1>

REMARQUES AU SUJET DE LA QUESTION 654;

PAR M. EUGÈNE BELTRAMI.

L'énoncé de cette question est le suivant :

Démontrer que, si $\varphi(2\omega) = \varphi(\omega).\cos\omega$, *on aura* $\varphi(\omega) = \varphi(0).\frac{\sin\omega}{\omega}$.

La solution indiquée dans cet énoncé n'est pas, à beaucoup près, la plus générale que comporte la question. C'est ce qui ressortira de l'analyse suivante, dans laquelle je supposerai d'abord, pour plus de clarté, que la variable ω se maintienne toujours réelle et positive.

Si l'on multiplie l'équation proposée par $2\sin\omega$, qu'on mette le résultat sous la forme

$$2\frac{\varphi(2\omega)}{\sin 2\omega} = \frac{\varphi(\omega)}{\sin\omega},$$

et qu'on pose

$$(1)\qquad \frac{\varphi(\omega)}{\sin\omega} = \psi(\omega),$$

on aura à résoudre l'équation suivante, plus simple que la proposée,

$$(2)\qquad 2\psi(2\omega) = \psi(\omega).$$

En changeant successivement dans celle-ci ω en 2ω, $4\omega, \ldots, 2^{m-1}\omega$, on obtient

$$\begin{aligned} 2\psi(4\omega) &= \psi(2\omega),\\ 2\psi(8\omega) &= \psi(4\omega),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ 2\psi(2^m\omega) &= \psi(2^{m-1}\omega), \end{aligned}$$

et, en multipliant toutes ces équations entre elles et avec l'équation (2), il vient

$$(3)\qquad 2^m\psi(2^m\omega) = \psi(\omega)$$

Ici m est un nombre entier et positif; mais si l'on remplace dans cette formule ω par $2^{-n}\omega$, où n est un nombre entier et positif moindre que m, on trouve

$$2^m\psi(2^{m-n}\omega) = \psi(2^{-n}\omega);$$

d'un autre côté, en changeant dans la même formule m en $m-n$, il résulte

$$2^{m-n}\psi(2^{m-n}\omega) = \psi(\omega):$$

donc l'équation (3) subsiste pour toute valeur entière, positive ou négative de m.

D'après cette même équation (3), la valeur de la fonction $2^m\psi(2^m\omega)$ est toujours égale, tant que m est un nombre entier, à celle que cette fonction reçoit pour $m = 0$. Par suite, la valeur générale de cette fonction, c'est-à-dire celle qui répond à une valeur quelconque rationnelle ou irrationnelle de m, que je désignerai par μ, doit se réduire à $\psi(\omega)$ pour toute valeur entière de μ. Je pose donc

$$2^\mu \psi(2^\mu \omega) = \psi(\omega).\cos 2h\pi\mu + F(\mu, \omega).\sin k\pi\mu,$$

où h et k sont deux nombres entiers quelconques, et où $F(\mu, \omega)$ est une fonction qui ne devient pas infinie pour des valeurs entières de μ. De cette équation, en faisant $\omega = 1$, on tire

$$2^\mu \psi(2^\mu) = \psi(1) \cos 2h\pi\mu + F(\mu).\sin k\pi\mu,$$

où l'on a écrit $F(\mu)$ à la place de $F(\mu, 1)$. Enfin, en posant

$$2^\mu = \omega,$$

d'où

$$\mu = \frac{\log \omega}{\log 2},$$

et écrivant, d'après l'équation (1), $\frac{\varphi(1)}{\sin 1}$ à la place de $\psi(1)$, on a

$$\psi(\omega) = \frac{\varphi(1)}{\omega \sin 1} \cos \frac{2h\pi \log \omega}{\log 2} + F_1(\omega).\sin \frac{k\pi \log \omega}{\log 2},$$

où

$$F_1(\omega) = \frac{1}{\omega} F\left(\frac{\log \omega}{\log 2}\right).$$

La fonction $F_1(\omega)$ n'est point arbitraire. En effet, si, dans l'équation précédente, on change ω en 2ω, on obtient

$$2\psi(2\omega) = \frac{\varphi(1)}{\omega \sin 1} \cos \frac{2h\pi \log \omega}{\log 2} + 2F_1(2\omega).\sin \frac{k\pi \log \omega}{\log 2}(-1)^k,$$

et par suite, d'après l'équation (2),

$$2F_1(2\omega) = (-1)^k.F_1(\omega).$$

Si donc on prend pour k un nombre pair $2k$, on aura, pour $\psi(\omega)$, la valeur

$$(5)\quad \psi(\omega) = \frac{\varphi(1)}{\omega \sin 1}\cdot\cos\frac{2h\pi\log\omega}{\log 2} + F_1(\omega).\sin\frac{2k\pi\log\omega}{\log 2},$$

et pour $F_1(\omega)$, l'équation

$$(6)\qquad 2F_1(2\omega) = F_1(\omega).$$

Cette dernière équation, étant absolument de même forme que l'équation (2), donnera, de la même manière,

$$F_1(\omega) = \frac{F_1(1)}{\omega \sin 1}\cos\frac{2h'\pi\log\omega}{\log 2} + F_2(\omega).\sin\frac{2k'\pi\log\omega}{\log 2},$$

et, pour la fonction $F_2(\omega)$, on aura de nouveau

$$F_2(\omega) = \frac{F_2(1)}{\omega \sin 1}\cdot\cos\frac{2h''\pi\log\omega}{\log 2} + F_3(\omega).\sin\frac{2k''\pi\log\omega}{\log 2};$$

et ainsi de suite.

En substituant successivement ces valeurs les unes dans les autres et dans les équations (5) et (2), on trouvera enfin

$$\varphi(\omega) = \frac{\sin\omega}{\omega\sin 1}$$

$$\times\left[\varphi(1)\cos\frac{2h\pi\log\omega}{\log 2} + F_1(1)\sin\frac{2h\pi\log\omega}{\log 2}\cos\frac{2h'\pi\log\omega}{\log 2}\right.$$
$$\left. + F_2(1)\sin\frac{2k\pi\log\omega}{\log 2}\sin\frac{2k'\pi\log\omega}{\log 2}\cos\frac{2h''\pi\log\omega}{\log 2}+\ldots\right].$$

Or, on voit assez clairement que l'ensemble des termes renfermés dans les parenthèses, à raison de la valeur entièrement arbitraire qu'on peut attribuer à chacune des constantes

$$\begin{array}{lll} \varphi(1), & F_1(1), & F_2(1),\ldots, \\ h, & h', & h'',\ldots, \\ k, & k', & k'',\ldots, \end{array}$$

dont le nombre est indéterminé, peut être censé représenter une fonction quelconque des deux quantités

$$\sin\frac{2\pi\log\omega}{\log 2},\quad \cos\frac{2\pi\log\omega}{\log 2},$$

ou même d'une seule d'entre elles, ce qui ne diminue point la généralité de cette fonction. En désignant donc celle-ci par

$$\Theta\left(\sin\frac{2\pi\log\omega}{\log 2},\quad \cos\frac{2\pi\log\omega}{\log 2}\right),$$

on pourra poser

$$(7)\qquad \varphi(\omega)=\frac{\sin\omega}{\omega}\,\Theta\left(\sin\frac{2\pi\log\omega}{\log 2},\quad \cos\frac{2\pi\log\omega}{\log 2}\right).$$

D'après la manière dont cette formule a été obtenue, ω y entre comme une quantité positive; mais, si l'on se reporte à l'équation proposée, on voit facilement que la valeur de $\varphi(\omega)$ donnée ci-dessus ne cesse de satisfaire à cette équation quand on donne à ω des valeurs négatives ou même imaginaires; car les formules

$$\sin 2u = 2\sin u\cos u,\quad \log uv = \log u + \log v$$

continuent d'avoir lieu quand u et v deviennent imaginaires, ainsi que l'a démontré Cauchy (*Exercices d'Analyse et de Physique mathématique,* t. IV), pourvu que l'on adopte des définitions convenables pour ces fonctions, quand la variable devient imaginaire. On peut donc regarder la formule (7) comme étant applicable à tous les cas.

Si l'on suppose que la fonction Θ se réduise à une simple constante arbitraire, et si l'on remarque que cette constante représente alors la valeur que la fonction reçoit pour $\omega = 0$, on obtient, comme cas particulier de la formule (7), la solution indiquée dans l'énoncé de la question.

Note. — Pourquoi les méthodes employées (p. 285 et 286) n'ont-elles conduit qu'à une solution particulière ? P.