Nouvelles annales de mathématiques

H. Faure

Extrait d'un mémoire sur les coordonnées trilinéaires

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 2 (1863), p. 289-300

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__289_0>

EXTRAIT D'UN MÉMOIRE SUR LES COORDONNÉES TRILINÉAIRES;

Par M. H. FAURE,
Capitaine d'artillerie.

Un point est déterminé dans un plan lorsque l'on connaît ses distances α, β, γ aux trois côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC dit *triangle de référence*. Si l'on désigne par a, b, c les côtés du triangle, par S la surface, on a toujours la relation

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 2S.$$

Toute relation du premier degré

$$L = l\alpha + m\beta + n\gamma$$

entre les coordonnées α, β, γ d'un point représente une ligne droite.

Équation de la droite qui passe par deux points donnés α' et α''.

Si l'on désigne par $(\alpha', \beta', \gamma')$ les coordonnées du point α', par $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ celles du point α'', la droite cherchée a pour équation

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix} = 0.$$

Intersection de deux droites. — Parallélisme.

Soient $L = 0$, $L' = 0$ les droites données : L' se déduisant de L en ajoutant un accent aux lettres l, m, n, on aura au point d'intersection

$$D\alpha = 2S(mn' - m'n),$$
$$D\beta = 2S(nl' - n'l),$$
$$D\gamma = 2S(lm' - l'm),$$
$$D = \begin{vmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \\ a & b & c \end{vmatrix}.$$

$D = 0$ est la condition du parallélisme. Ces formules montrent également que la droite qui a pour équation

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$$

est l'équation d'une droite située à l'infini dans le plan du triangle de référence.

Angle des deux droites L *et* L'.

$$\tan\theta = \frac{D}{2R[(ll' + mm' + nn') - \cos A(mn' + m'n) - \cos B(ln' + l'n) - \cos C(lm' + l'm)]},$$

R rayon du cercle circonscrit au triangle ABC; A, B, C angles de ce triangle;

$$\sin\theta = \frac{D}{2R\sqrt{PP'}}.$$

$$P = l^2 + m^2 + n^2 - 2\,mn\cos A - 2\,ln\cos B - 2\,lm\cos C,$$
$$P' = l'^2 + m'^2 + n'^2 - 2m'n'\cos A - 2l'n'\cos B - 2l'm'\cos C.$$

Soient

$$\alpha_1 = 1, \qquad \alpha_2 = 1,$$
$$\beta_1 = -\cos C - \sin C\sqrt{-1}, \quad \beta_2 = -\cos C + \sin C\sqrt{-1},$$
$$\gamma_1 = -\cos B + \sin B\sqrt{-1}, \quad \gamma_2 = -\cos B - \sin B\sqrt{-1},$$

les coordonnées de deux points α_1 et α_2 (nécessairement à l'infini sur un cercle), on aura

$$P = (l\alpha_1 + m\beta_1 + n\gamma_1)(l\alpha_2 + m\beta_2 + n\gamma_2),$$
$$P' = (l'\alpha_1 + m'\beta_1 + n'\gamma_1)(l'\alpha_2 + m'\beta_2 + n'\gamma_2).$$

Supposons que les deux droites L et L′ soient représentées par l'équation unique

$$\varphi = A_{11}\alpha^2 + A_{22}\beta^2 + A_{33}\gamma^2 + 2A_{12}\alpha\beta + 2A_{13}\alpha\gamma + 2A_{23}\beta\gamma = 0;$$

on aura

$$\tang\theta = \frac{\sqrt{-\nabla}}{\mathrm{RE}}, \quad \nabla = \begin{vmatrix} a & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ b & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ c & A_{31} & A_{32} & A_{33} \\ 0 & a & b & c \end{vmatrix} \quad (A_{rs} = A_{sr}),$$

$$E = A_{11} + A_{22} + A_{33} - 2A_{23}\cos A - 2A_{13}\cos B - 2A_{12}\cos C.$$

Équation de la droite perpendiculaire à L, menée par le point α′.

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & l - m\cos C - n\cos B \\ \beta & \beta' & -l\cos C + m - n\cos A \\ \gamma & \gamma' & -l\cos B - m\cos A + n \end{vmatrix} = 0.$$

Distance du point α′ à la droite L.

$$\delta = \frac{l\alpha' + m\beta' + n\gamma'}{\sqrt{P}}.$$

Distance des deux points α′, α″.

Soit λ cette distance :

$$\lambda^2 = \frac{R^2}{S^2}[(\beta'\gamma'')^2 + (\alpha'\beta'')^2 + (\gamma'\alpha'')^2 - 2\cos A(\alpha'\beta'')(\gamma'\alpha'')$$
$$- 2\cos B(\beta'\gamma'')(\alpha'\beta'') - 2\cos C(\beta'\gamma'')(\gamma'\alpha'')]$$

$$\lambda^2 = \frac{R^2}{S}[(\alpha' - \alpha'')^2\sin 2A + (\beta' - \beta'')^2\sin 2B + (\gamma' - \gamma'')^2\sin 2C]$$

$$\lambda^2 = \frac{R^2}{S^2}\begin{vmatrix} 1 & -\cos C & -\cos B & \alpha'' & \alpha' \\ -\cos C & 1 & -\cos A & \beta'' & \beta' \\ -\cos B & -\cos A & 1 & \gamma'' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & 0 & 0 \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

En introduisant les points imaginaires α_1 et α_2, on a

$$\lambda^2 = \frac{R^2}{S^4} \begin{vmatrix} \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}.$$

Si les points donnés sont situés sur la droite L, et qu'ils résultent de l'intersection de cette droite L avec deux autres L′, L″, on trouve

$$\lambda = 4\,RS \frac{\begin{vmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \\ l'' & m'' & n'' \end{vmatrix} \sqrt{P}}{\begin{vmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \\ a & b & c \end{vmatrix} \begin{vmatrix} l & m & n \\ l'' & m'' & n'' \\ a & b & c \end{vmatrix}}.$$

Si les droites L′ et L″ sont données par l'équation unique $\varphi = 0$, on aura

$$\lambda = 8\,RS \frac{\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & l \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & m \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & n \\ l & m & n & 0 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \sqrt{P}}{\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & a & l \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & b & m \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & c & n \\ a & b & c & 0 & 0 \\ l & m & n & 0 & 0 \end{vmatrix}} \quad (A_{rs} = A_{sr}).$$

Sous cette forme, φ peut représenter une conique, λ est alors la partie de L comprise dans la conique.

Remarque. — L'équation de la droite L peut se mettre sous la forme

$$aa_1\alpha + bb_1\beta + cc_1\gamma = 0,$$

en désignant par a_1, b_1, c_1 les distances des sommets A, B, C du triangle de référence à cette droite. Toutes les formules précédentes deviennent d'une très-grande simplicité, en se donnant une droite, comme nous venons de l'indiquer. J'ai donné ces relations à la page 223 du tome XX des *Nouvelles Annales*.

Le Mémoire est suivi de diverses applications relatives aux propriétés métriques et descriptives des triangles, au rapport anharmonique, aux faisceaux homographiques, etc.

Je cite l'une d'elles. Le lieu d'un point, tel que ses distances α, β, γ aux trois côtés d'un triangle sont proportionnelles à une certaine puissance de ses côtés a, b, c, est donné par l'équation

$$\alpha^{\log\frac{c}{b}}\beta^{\log\frac{a}{c}}\gamma^{\log\frac{b}{a}} = 1.$$

COURBES DU SECOND ORDRE.

Soit $\varphi = 0$ l'équation d'une conique écrite sous la forme déjà indiquée; nous aurons à considérer les deux fonctions ∇ et E citées plus haut, et la fonction Δ définie par la relation

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}.$$

Nous désignerons généralement par a_{rs} le coefficient de A_{rs} dans le développement du déterminant Δ.

L'espèce d'une conique se déduit des fonctions ∇ et E; on a :

Une hyperbole, si $\nabla < 0$;
Une ellipse, si $\nabla > 0$;
Une parabole, si $\nabla = 0$;

Une hyperbole équilatère, si $E = 0$;

Un cercle, lorsque les coordonnées des points imaginaires α_1, α_2 vérifient l'équation $\varphi = 0$.

Tangente au point α' de la conique.

$$\frac{d\varphi}{d\alpha'}\alpha + \frac{d\varphi}{d\beta'}\beta + \frac{d\varphi}{d\gamma'}\gamma = 0,$$

ou

$$\begin{vmatrix} \alpha & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \beta & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \gamma & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 0 & \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 0;$$

lorsque le point α' n'est pas sur la conique, les équations précédentes donnent la polaire du point α'.

Pôle d'une droite L par rapport à la conique φ.

Soit α' ce pôle, on a

$$\alpha' = \frac{2S}{U}\frac{dU}{da} = \frac{2S}{U}(la_{11} + ma_{12} + na_{13}),$$

$$\beta' = \frac{2S}{U}\frac{dU}{db} = \frac{2S}{U}(la_{21} + ma_{22} + na_{23}),$$

$$\gamma' = \frac{2S}{U}\frac{dU}{dc} = \frac{2S}{U}(la_{31} + ma_{32} + na_{33}),$$

$$U = \begin{vmatrix} a & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ b & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ c & A_{31} & A_{32} & A_{33} \\ 0 & l & m & n \end{vmatrix}.$$

Centre de la conique φ. — Dans les relations précédentes, il suffira de faire $l = a$, $m = b$, $n = c$. Les coordonnées du centre sont donc

$$\alpha' = \frac{2S}{\nabla}\,\frac{d\nabla}{da},$$

$$\beta' = \frac{2S}{\nabla}\cdot\frac{d\nabla}{db},$$

$$\gamma' = \frac{2S}{\nabla}\,\frac{d\nabla}{dc}.$$

CERCLE.

Équation du cercle qui a pour rayon ρ et le point α' pour centre.

$$(a\alpha + b\beta + c\gamma)^2\rho^2 = 4R^2 \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}.$$

Elle se déduit immédiatement de la formule qui donne la distance de deux points. Elle fait voir que tous les cercles passent par les points imaginaires α_1, α_2 situés à l'infini, et que les deux déterminants du second membre égalés à o donnent les asymptotes du cercle.

Puissance du point α par rapport au cercle φ.

Soit ϖ cette puissance

$$\varpi = 2\,\frac{\varphi(\alpha, \beta, \gamma)}{E}.$$

Rayon du cercle φ.

$$\rho^2 = -8S^2\,\frac{\Delta}{E\nabla}.$$

Cercle circonscrit au triangle ABC *de référence.*

$$a\beta\gamma + b\alpha\gamma + c\alpha\beta = 0, \quad E = -\frac{2S}{R}.$$

Cercle inscrit au triangle ABC.

$$\sqrt{\alpha}\cos\frac{1}{2}A + \sqrt{\beta}\cos\frac{1}{2}B + \sqrt{\gamma}\cos\frac{1}{2}C = 0, \quad E = \frac{p^2}{2R^2}.$$

Cercle qui touche le côté a et les prolongements des deux autres côtés.

$$\sqrt{\alpha}\cos\frac{1}{2}A + \sqrt{\beta}\sin\frac{1}{2}B + \sqrt{\gamma}\sin\frac{1}{2}C = 0.$$

Cercle décrit sur BC *comme diamètre.*

$$\alpha^2\cos A - \alpha\beta\cos B - \alpha\gamma\cos C - \beta\gamma = 0, \quad E = \frac{2S}{Ra}.$$

Les cercles décrits sur les autres côtés pris pour diamètres se déduiront de celui-ci par des permutations.

Cercle conjugué au triangle de référence.

Nous disons qu'un cercle est conjugué par rapport à un triangle lorsque le pôle de chaque côté du triangle coïncide avec le sommet opposé.

L'équation d'un tel cercle est

$$\alpha^2\sin 2A + \beta^2\sin 2B + \gamma^2\sin 2C = 0, \quad E = \frac{2S}{R^2};$$

coordonnées du centre,

$$\alpha = 2R\cos B\cos C, \quad \beta = 2R\cos A\cos C, \quad \gamma = 2R\cos A\cos B.$$

C'est le point de rencontre des hauteurs du triangle.

Rayon..... $\rho^2 = -4R^2\cos A\cos B\cos C.$

Cercle passant par les milieux des côtés du triangle de référence.

$$\frac{a^2}{-a\alpha+b\beta+c\gamma}+\frac{b^2}{a\alpha-b\beta+c\gamma}+\frac{c^2}{a\alpha+b\beta-c\gamma}=0,$$

$$\frac{a\cos A}{-\alpha\cos A+\beta\cos B+\gamma\cos C}+\frac{b\cos B}{\alpha\cos A-\beta\cos B+\gamma\cos C}$$
$$+\frac{c\cos C}{\alpha\cos A+\beta\cos B-\gamma\cos C}=0,$$

$$a\beta\gamma+b\alpha\gamma+c\alpha\beta$$
$$-R(\alpha^2\sin 2A+\beta^2\sin 2B+\gamma^2\sin 2C)=0,$$

$$a\beta\gamma+b\alpha\gamma+c\alpha\beta$$
$$-\frac{1}{2}(a\alpha+b\beta+c\gamma)(\alpha\cos A+\beta\cos B+\gamma\cos C)=0,$$

$$\alpha(-a\alpha+b\beta+c\gamma)\cos A$$
$$+\beta(a\alpha-b\beta+c\gamma)\cos B+\gamma(a\alpha+b\beta-c\gamma)\cos C=0$$

Ces différentes formes expriment autant de théorèmes.

Centre du cercle.

$$\alpha=\frac{R}{2}\cos(B-C),\quad \beta=\frac{R}{2}\cos(C-A),\quad \gamma=\frac{R}{2}\cos(A-B).$$

Équation des tangentes menées du point α' à la conique φ.

$$T=\begin{vmatrix}\alpha & \alpha' & a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ \beta & \beta' & a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ \gamma & \gamma' & a_{31} & a_{32} & a_{33}\\ 0 & 0 & \alpha' & \beta' & \gamma'\\ 0 & 0 & \alpha & \beta & \gamma\end{vmatrix}=0,$$

$$\mathrm{T}\Delta^2 = \begin{vmatrix} \alpha & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \beta & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \gamma & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 0 & \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha' & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \beta' & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \gamma' & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 0 & \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} \alpha & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \beta & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \gamma & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 0 & \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix}^2 = 0,$$

$$4\mathrm{T} = 4\varphi(\alpha, \beta, \gamma)\,\varphi(\alpha', \beta', \gamma') - \left(\frac{d\varphi}{d\alpha'}\alpha + \frac{d\varphi}{d\beta'}\beta + \frac{d\varphi}{d\gamma'}\gamma\right)^2.$$

Équation des asymptotes de la conique φ.

On écrit, dans les équations précédentes, que α' est le centre de la conique. On trouve, pour les asymptotes, l'équation

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) - \frac{\Delta}{\nabla}(a\alpha + b\beta + c\gamma)^2 = 0.$$

Angle formé par les tangentes menées du point α' à la conique φ.

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{2(a\alpha' + b\beta' + c\gamma')\sqrt{-\Delta\varphi(\alpha', \beta', \gamma')}}{\mathrm{RQ}}.$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Q} = {} & (a\alpha' + b\beta' + c\gamma') \\ & \left[(a_{22} + a_{33} + 2a_{23}\cos\mathrm{A})\frac{\alpha'}{a} + (a_{11} + a_{33} + 2a_{13}\cos\mathrm{B})\frac{\beta'}{b}\right. \\ & \qquad \left. + (a_{11} + a_{22} + 2a_{12}\cos\mathrm{C})\frac{\gamma'}{c}\right] \\ & - \frac{\nabla}{abc}(a\beta'\gamma' + b\alpha'\gamma' + c\alpha'\beta'). \end{aligned}$$

En posant $\mathrm{Q} = 0$, on a le cercle lieu des sommets des angles droits circonscrits à la conique φ.

Angle formé par les asymptotes de la conique φ.

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\sqrt{-\nabla}}{\mathrm{RE}}.$$

Somme des carrés des demi-axes principaux de la conique φ.

$$\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 = - a^2 b^2 c^2 \frac{\Delta\,\mathrm{E}}{\nabla^2}.$$

Produit des carrés des demi-axes principaux de la conique φ.

$$\mathcal{A}^2 \mathcal{B}^2 = \frac{a^4 b^4 c^4}{4\,\mathrm{R}^2}\,\frac{\Delta^2}{\nabla^3}.$$

Équation des axes principaux de la conique φ.

$$\begin{vmatrix} \dfrac{d\varphi}{d\alpha} & \dfrac{dQ}{d\alpha} & a \\ \dfrac{d\varphi}{d\beta} & \dfrac{dQ}{d\beta} & b \\ \dfrac{d\varphi}{d\gamma} & \dfrac{dQ}{d\gamma} & c \end{vmatrix} = 0.$$

Q est le cercle défini ci-dessus.

Équation des directrices de la conique φ.

$$\nabla\varphi^2 - 4\mathrm{R}^2\mathrm{E}Q\varphi + 4\mathrm{R}^2 Q^2 = 0.$$

Cette équation donne les quatre directrices : deux réelles données par l'équation

$$\Delta\varphi + \frac{\nabla}{4\,\mathrm{S}^2} Q\mathcal{A}^2 = 0;$$

deux imaginaires données par l'équation

$$\Delta\varphi + \frac{\nabla}{4\,\mathrm{S}^2} Q\mathcal{B}^2 = 0.$$

On voit aisément, d'après les valeurs de $\mathcal{A}^2$ et de $\mathcal{B}^2$, que le produit de ces deux équations donne la première.

En appliquant ces résultats généraux aux cas particuliers des coniques inscrites, circonscrites ou conjuguées au triangle de référence, on obtient divers théorèmes qui font le sujet de questions dans les *Nouvelles Annales*.