J.-F. CH.

# Conditions analytiques pour que les surfaces engendrées par le mouvement d'une ligne droite soient tangentes tout le long d'une génératrice commune

*Nouvelles annales de mathématiques 2e série*, tome 2 (1863), p. 262-264

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__262_0>

# CONDITIONS ANALYTIQUES
## Pour que les surfaces engendrées par le mouvement d'une ligne droite soient tangentes tout le long d'une génératrice commune;

PAR M. J.-F. CH.

Toute droite dans l'espace a pour équations :

$$x = \alpha z + \beta, \tag{1}$$
$$y = \gamma z + \delta. \tag{2}$$

Lorsque les paramètres $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ sont fonctions d'une même variable V, la droite passe d'une position à l'autre suivant une certaine loi qui dépend de la nature de ces fonctions; et elle engendre une surface dont la forme est la conséquence de cette loi. En laissant donc ces fonctions tout à fait indéterminées, on peut dire que toute surface qui a une ligne droite pour génératrice peut être représentée par le système des équations finies (1) et (2) entre lesquelles on doit éliminer V.

Par suite, on peut prendre pour les équations finies de deux de ces surfaces :

$$x = \alpha z + \beta, \quad y = \gamma z + \delta,$$

$\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ sont fonctions de V;

$$x = \lambda z + \mu, \quad y = \nu z + \rho,$$

$\lambda$, $\mu$, $\nu$, $\rho$ sont fonctions de W.

Supposons que la génératrice commune soit donnée par $V = v$, $W = w$; et que $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$; $\lambda$, $\mu$, $\nu$, $\rho$ aient alors respectivement les valeurs déterminées $a$, $b$, $c$, $d$,

$l$, $m$, $n$, $r$; on a évidemment:

$$a = l, \quad b = m, \quad c = n, \quad d = r.$$

Nommons $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$, $\delta'$, $\lambda'$, $\mu'$, $\nu'$, $\rho'$ les dérivées de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ par rapport à V et de $\lambda$, $\mu$, $\nu$, $\rho$ par rapport à W; et $a'$, $b'$, $c'$, $d'$, $l'$, $m'$, $n'$, $r'$ ce que deviennent ces dérivées quand on y fait respectivement $V = v$, $W = w$. Les quantités $a'$, $b'$, $c'$, $d'$, $l'$, $m'$, $n'$, $r'$ ont, ainsi que $a$, $b$, $c$, $d$, $l$, $m$, $n$, $r$, des valeurs déterminées.

Pour que les deux surfaces soient tangentes en un point commun, il faut que, pour ce point, $x$, $y$, $z$ et $dx$, $dy$, $dz$ soient les mêmes; on doit donc avoir

$$dx = \alpha dz + (\alpha' z + \beta') dV = \lambda dz + (\lambda' z + \mu') dW,$$
$$dy = \gamma dz + (\gamma' z + \delta') dV = \nu dz + (\nu' z + \rho') dW.$$

En faisant $V = v$, $W = w$, pour exprimer que le point considéré est situé sur la génératrice commune, ces équations deviennent:

$$(a' z + b') dV = (l' z + m') dW,$$
$$(c' z + d') dV = (n' z + r') dW.$$

Donc

$$\frac{a' z + b'}{c' z + d'} = \frac{l' z + m'}{n' z + r'}. \tag{3}$$

Cette équation donne le $z$ du point de tangence, et l'on a pour l'$x$ et l'$y$ de ce point:

$$x = az + b, \quad y = cz + d.$$

L'équation (3) est évidemment de la forme

$$Mz^2 + Nz + P = 0, \tag{4}$$

dans laquelle M, N, P sont des quantités déterminées.

Comme elle est du second degré, elle a deux racines, et ces deux racines sont simultanément réelles ou simultanément imaginaires.

Donc, quand il y a un point de tangence sur la génératrice commune, il y en a deux.

Si maintenant l'on veut qu'il y ait tangence tout le long de cette génératrice, il faut que l'équation (4) soit satisfaite, quel que soit $z$. Par conséquent les conditions de tangence que l'on cherche sont :

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{M} = a'n' - c'l' = 0, \\ \mathrm{N} = a'r' - c'm' + b'n' - d'l' = 0, \\ \mathrm{P} = b'r' - d'm' = 0. \end{array}\right.$$

Ces conditions sont toujours satisfaites quand les deux surfaces ont sur la génératrice commune trois points de tangence différents; car alors les ordonnées, de valeurs différentes, de ces trois points, doivent satisfaire à l'équation (4), qui n'est que du second degré; et cela ne peut avoir lieu qu'autant qu'on a à la fois $\mathrm{M}=0$, $\mathrm{N}=0$, $\mathrm{P}=0$.

De là résulte ce théorème, démontré géométriquement depuis longtemps, que deux surfaces gauches qui ont trois plans tangents communs sur une même droite génératrice sont tangentes tout le long de cette génératrice.

Enfin, lorsque les deux surfaces données ont quelques conditions communes dans le mode de génération, il existe des relations déterminées entre quelques-unes des fonctions $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ et $\lambda$, $\mu$, $\nu$, $\rho$; une ou plusieurs des quantités M, N, P deviennent nulles d'elles-mêmes, et alors, au lieu de trois plans tangents généralement nécessaires pour qu'il y ait tangence complète, il n'en faut plus que deux et même un suivant les circonstances. C'est ainsi, par exemple, que deux plans tangents suffisent pour les surfaces conoïdes ayant une génératrice commune, et qu'il n'en faut qu'un seul pour les surfaces développables.