NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

JULES SABATIÉ

Note sur les imaginaires

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 2 (1863), p. 206-209

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__206_1>

NOTE SUR LES IMAGINAIRES;

PAR M. JULES SABATIÉ.

Dans tous les Cours d'Algèbre on a soin de remarquer que les nombres négatifs n'ont point de logarithmes, et l'on renvoie aux livres d'analyse pour y montrer que l'on peut trouver pour les nombres négatifs des logarithmes réductibles à la forme générale des quantités imaginaires, $a + b\sqrt{-1}$.

En trigonométrie, il se présente aussi des fonctions impossibles, lorsqu'en étudiant les fonctions inverses on tombe sur des expressions de la forme

$$(1) \qquad y = \arcsin(1 + k^2),$$

car il n'existe point d'arc dont le sinus soit plus grand que le rayon.

Je crois que, jusqu'ici, on s'est borné à dire que de tels arcs n'existent pas, négligeant de rechercher si de telles quantités ne sont point réductibles à la forme $a + b\sqrt{-1}$. Or, je vais démontrer qu'il en est ainsi.

Pour cela je ferai remarquer qu'une fonction quelconque telle que (1) peut rentrer dans la suivante

$$(2) \qquad y = \arc\sin \sqrt{1+x^2}$$

qui se prête mieux au calcul.

Or, si maintenant nous convenons d'étendre à ces fonctions les règles ordinaires de la différentiation (convention qui évidemment n'a rien que de permis, puisque ces mêmes règles ont été étendues aux fonctions imaginaires), l'expression (2) nous donne :

$$dy = \frac{d.\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{-x^2}} = \frac{\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}}{x\sqrt{-1}} = -\sqrt{-1}\,\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}},$$

et par conséquent

$$y = \mathrm{C} - \sqrt{-1}\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}},$$

en traitant, selon l'usage, $\sqrt{-1}$ comme une constante. Or

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int\frac{\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}+dx}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \int\frac{d.(\sqrt{1+x^2}+x)}{x+\sqrt{1+x^2}} = \mathrm{l}\,(x+\sqrt{1+x^2}),$$

de sorte que

$$y \text{ ou } \arc\sin\sqrt{1+x^2} = \mathrm{C} - \sqrt{-1}\,\mathrm{l}\,(x+\sqrt{1+x^2}).$$

Reste à déterminer la constante arbitraire. Pour cela faisons $x = 0$ dans l'égalité précédente, et prenons, ce que nous sommes libres de faire, la valeur positive de $\sqrt{1}$; il vient ainsi

$$\arc\sin 1 = \mathrm{C} - \sqrt{-1}\,\mathrm{l}.1 = \mathrm{C},$$

d'où

$$C = 2k\varpi + \frac{\varpi}{2},$$

k étant, à l'ordinaire, un nombre positif, négatif ou nul. On a donc en définitive

$$(a)\quad \operatorname{arc\,sin}\sqrt{1+x^2} = \left(2k\varpi + \frac{\varpi}{2}\right) - \sqrt{-1}\,\mathrm{l}\left(x + \sqrt{1+x^2}\right).$$

Avant d'aller plus loin, il est bon de vérifier que cette formule n'est point en contradiction avec la formule des logarithmes imaginaires. Pour cela donnons à x la valeur zéro, dans l'expression (a), mais prenons la valeur négative de $\sqrt{1}$; il vient

$$\operatorname{arc\,sin}(-1) = \left(2k\varpi + \frac{\varpi}{2}\right) - \sqrt{-1}\,\mathrm{l}.(-1),$$

mais on sait que

$$\mathrm{l}(-1) = (2n\varpi + \varpi)\sqrt{-1}.$$

On a donc

$$\operatorname{arc\,sin}(-1) = \left(2k\varpi + \frac{\varpi}{2}\right) + (2n\varpi + \varpi)$$
$$= 2(n+k)\varpi + \frac{3\varpi}{2},$$

résultat conforme à ce que l'on trouve directement.

Prenons encore la fonction

$$y = \operatorname{arc\,cos}\sqrt{1+x^2}.$$

Par des calculs identiques aux précédents, on arrive à la formule suivante :

$$(b)\qquad \operatorname{arc\,cos}\sqrt{1+x^2} = 2k'\varpi + \sqrt{-1}\,\mathrm{l}.\left(x + \sqrt{1+x^2}\right),$$

de sorte qu'en ajoutant (a) et (b) on a

$$\text{arc sin}\sqrt{1+x^2} + \text{arc cos}\sqrt{1+x^2} = 2(k+k')\varpi + \frac{\varpi}{2},$$

comme dans les cas ordinaires.

En appliquant la même méthode aux fonctions suivantes

$$\text{arc séc}\,\frac{1}{1+x^2}, \qquad \text{arc cosé}c\,\frac{1}{1+x^2},$$

on arrive à des formules analogues ; de telle sorte que les arcs dont les sinus ou cosinus sont plus grands que l'unité et les sécantes ou cosécantes moindres que 1 sont réductibles à la forme type $a + b\sqrt{-1}$.