NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

DURRANDE

Recherches sur la surface des ondes

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 2 (1863), p. 193-204

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__193_0>

RECHERCHES SUR LA SURFACE DES ONDES;

PAR M. DURRANDE,
Professeur au lycée de Moulins.

I.

Équation qui donne les axes d'une section diamétrale d'un ellipsoïde en fonction des paramètres du plan sécant. — Théorème qu'on en déduit.

Soient :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1; \tag{1}$$

l'équation d'un ellipsoïde, et

$$Ax+By+Cz=0 \tag{2}$$

celle d'un plan passant par son centre.

Cherchons l'équation d'où l'on puisse déduire les demi-axes de la section elliptique faite dans la surface par le plan (2).

Il suffit pour cela de prendre les formules qui servent à obtenir l'équation de la courbe dans son plan.

Voici le tableau de ces formules :

$$\left\{\begin{array}{l} x=x'\cos\varphi+y'\cos\theta\sin\varphi,\\ y=y'\sin\varphi-y'\cos\theta\cos\varphi,\\ z=y'\sin\theta,\end{array}\right.$$

φ et θ s'exprimant en A, B, C par les formules suivantes :

$$\left\{\begin{array}{ll} \tang\varphi=-\dfrac{A}{B}, & \cos\theta=\dfrac{-C}{S},\\[2ex] \sin\varphi=\dfrac{-A}{\sqrt{A^2+B^2}}, & \sin\theta=\dfrac{\sqrt{A^2+B^2}}{S},\\[2ex] \cos\varphi=\dfrac{-B}{\sqrt{A^2+B^2}}. & S^2=A^2+B^2+C^2.\end{array}\right.$$

Si on substitue les valeurs de (x, y, z) dans l'équation de la surface, l'équation de la courbe d'intersection prend la forme $Mx^2 + Pxy + Ny^2 = 1$, et l'on sait que les inverses des carrés des demi-axes sont les racines de l'équation

$$X^2 - (M + N)X + \frac{4MN - P^2}{4} = 0.$$

C'est précisément l'équation cherchée; si l'on met à la place de M, N, P leurs valeurs en A, B, C, on trouve facilement que l'équation cherchée est la suivante, dans laquelle ρ désigne l'une des racines :

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{1}{\rho}\right)^4 - \frac{1}{S^2}\left[\frac{A^2a^2(b^2+c^2)+B^2b^2(a^2+c^2)+C^2c^2(a^2+b^2)}{a^2b^2c^2}\right]\frac{1}{\rho^2} \\ &\qquad + \frac{1}{S^2}\left(\frac{A^2a^2+B^2b^2+C^2c^2}{a^2b^2c^2}\right) = 0 \ (*). \end{aligned} \right.$$

Je désigne par R et R′ les deux racines de cette équation; on aura entre les racines et les coefficients les relations bien connues :

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R'^2} = \frac{1}{S^2}\left[\frac{A^2a^2(b^2+c^2)+B^2b^2(a^2+c^2)+C^2c^2(a^2+b^2)}{a^2b^2c^2}\right], \\ &\frac{1}{R^2R'^2} = \frac{1}{S^2}\left(\frac{A^2a^2+B^2b^2+C^2c^2}{a^2b^2c^2}\right). \end{aligned} \right.$$

On peut se proposer de chercher l'expression de la différence $\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R'^2}$. Il suffit d'élever au carré la première des relations précédentes et d'en retrancher quatre fois la seconde. On trouvera, en effectuant les calculs :

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R'^2}\right)^2 S^4a^4b^4c^4 \\ &= [A^2a^2(b^2-c^2) + B^2b^2(a^2-c^2) + C^2c^2(a^2-b^2)]^2 \\ &\quad - 4A^2C^2a^2c^2(a^2-b^2)(b^2-c^2). \end{aligned}$$

(*) Cette équation coïncide, à la notation près, avec la première équation de la p. 270, t. XX. (Question 575, résolue par M. Kessler.) P.

Cherchons, d'autre part, les angles que fait le plan (2) avec les plans des sections circulaires de l'ellipsoïde. Ces plans sont compris dans l'équation

$$(4) \qquad cx\sqrt{a^2-b^2} \pm az\sqrt{b^2-c^2} = 0;$$

on en conclut facilement que les angles du plan (2), avec les plans représentés par les équations (4), ont pour cosinus les expressions suivantes :

$$\cos V = \frac{Ac\sqrt{a^2-b^2} + Ca\sqrt{b^2-c^2}}{bS\sqrt{a^2-c^2}}$$

$$\cos V' = \frac{Ac\sqrt{a^2-b^2} - Ca\sqrt{b^2-c^2}}{bS\sqrt{a^2-c^2}},$$

d'où l'on conclut sans peine :

$$b^4 S^4 \sin^2 V \sin^2 V' = \left[A^2a^2(b^2-c^2) + B^2b^2(a^2-c^2) + C^2c^2(a^2-b^2)\right]^2 - 4A^2C^2a^2c^2(a^2-b^2)(b^2-c^2),$$

et par suite

$$(5) \qquad \frac{1}{R^2} - \frac{1}{R'^2} = \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right)\sin V \sin V',$$

expression qui montre que *le produit des sinus des angles qu'un plan diamétral quelconque fait avec les plans des sections circulaires d'un ellipsoïde est proportionnel à la différence des carrés des inverses des demi-axes de la section faite par le plan diamétral dans l'ellipsoïde.*

II.

Définition et équation de la surface des ondes. — Nature des sections faites dans la surface par les plans coordonnés. — Points singuliers.

Nous venons de voir que, lorsqu'on coupe un ellipsoïde par un plan (2), on obtient une section elliptique dont les axes sont 2R, 2R'; cela posé :

Si, sur une perpendiculaire ou normale au plan de cette section, menée par le centre et de part et d'autre du centre, on porte les longueurs des demi-axes R, R', *et qu'on fasse ensuite mouvoir le plan de la section de toutes les manières autour du centre, le lieu des extrémités des longueurs portées sur la normale correspondante est une surface qu'on désigne sous le nom de* surface des ondes.

Proposons-nous de trouver l'équation de cette surface.

Soient (x, y, z) les coordonnées d'un point de la normale au plan (2); on a entre ces coordonnées et les paramètres du plan les relations

$$\frac{x}{A}=\frac{y}{B}=\frac{z}{C}, \tag{6}$$

et si l'on détermine le point (x, y, z) par la condition qu'il soit à une distance du centre égale à l'une des racines ρ de l'équation (3), on aura en outre la relation

$$x^2+y^2+z^2=\rho^2. \tag{7}$$

Or, il est clair que l'équation de la surface des ondes résulte de l'élimination de ρ, A, B, C entre les équations (3), (6), (7). Cette élimination conduit à l'équation

$$\left.\begin{array}{r}(x^2+y^2+z^2)(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)\\ -a^2(b^2+c^2)x^2-b^2(a^2+c^2)y^2-c^2(a^2+b^2)z^2+a^2b^2c^2=0.\end{array}\right\} \tag{8}$$

Telle est l'équation de la surface des ondes.

Pour nous faire une idée de la forme générale de la surface, nous chercherons la nature des courbes que l'on obtient en la coupant par les plans coordonnés.

Si l'on fait $z=0$ dans l'équation (8), elle prend la forme

$$(x^2+y^2-c^2)(a^2x^2+b^2y^2-a^2b^2)=0,$$

équation qui se décompose en deux autres,

$$\left\{\begin{array}{c} x^2+y^2=c^2 \\ a^2x^2+b^2y^2=a^2b^2 \end{array}\right\} \quad \text{avec} \quad z=0,$$

lesquelles représentent un cercle et une ellipse. Le cercle est intérieur à l'ellipse, si $a > b > c$.

Pour $x = 0$, on aura de même

$$(y^2+z^2-a^2)(b^2y^2+c^2z^2-b^2c^2)=0,$$

d'où l'on déduit :

$$\left\{\begin{array}{c} y^2+z^2=a^2 \\ b^2y^2+c^2z^2=a^2c^2 \end{array}\right\} \quad \text{avec} \quad x=0,$$

équations qui représentent un cercle et une ellipse; mais le cerle est extérieur à l'ellipse. Enfin, pour $y = 0$, on trouve :

$$\left\{\begin{array}{c} x^2+z^2=b^2 \\ a^2x^2+c^2z^2=a^2c^2 \end{array}\right\} \quad \text{avec} \quad y=0,$$

équations qui représentent encore un cercle et une ellipse qui se coupent en quatre points, dont les coordonnées sont :

$$x=\pm c\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}, \quad y=0, \quad z=\pm a\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}.$$

Si l'on construit les portions de ces courbes d'intersection situées dans l'angle dièdre des coordonnées positives, on aura une idée de la forme générale de la surface des ondes.

Il est clair, d'après la définition d'où nous sommes partis, que la surface des ondes se compose de deux nappes distinctes. En effet, les sections diamétrales de l'ellipsoïde ont leurs axes inégaux ; la normale à l'une de ces sections rencontre donc la surface des ondes en deux points distincts situés de part et d'autre du centre ; les sections circulaires seules ont leurs axes égaux, et par suite les normales à ces sections *menées par le centre* ne rencontrent la surface des ondes qu'en un seul point de chaque côté du plan sécant. Il n'y a donc que quatre points communs aux deux nappes de la surface des ondes, et ces quatre points sont les points communs au cercle et à l'ellipse, traces de la surface sur le plan des zx.

III.

Coniques sphériques et ellipsoïdales. — Nouvelles définitions de la surface des ondes.

Théorème. — *Si l'on fait mouvoir le plan d'une section diamétrale de l'ellipsoïde* (1), *de telle sorte que l'un des axes de cette section reste constant, la normale au plan sécant décrira un cône du second degré. Et suivant que l'un ou l'autre des deux axes restera constant, la normale décrira deux séries de cônes orthogonaux et homofocaux.*

Soient, comme précédemment, R et R′ les deux demi-axes d'une section diamétrale quelconque de l'ellipsoïde ; si l'on fait mouvoir le plan de la section de manière que l'un des axes reste égal à 2R, les extrémités de cet axe devant se trouver à la fois sur l'ellipsoïde,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

et sur la sphère,

$$\frac{x^2}{R^2}+\frac{y^2}{R^2}+\frac{z^2}{R^2}=1,$$

cet axe décrira un cône,

$$(9)\quad (a^2-R^2)\frac{x^2}{a^2}+(b^2-R^2)\frac{y^2}{b^2}+(c^2-R^2)\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Ce cône est un de ceux que M. Chasles désigne sous le nom de *cônes conjoints*. (Voir *Journal de Liouville*, t. III, p. 431.) Il résulte des belles propriétés démontrées par le savant géomètre, que le cône (9) a constamment pour plan tangent le plan de la section diamétrale lui-même; par suite la normale à ce plan décrit le cône supplémentaire du cône (9), c'est-à-dire le cône représenté par l'équation

$$(10) \qquad \frac{a^2x^2}{a^2-R^2}+\frac{b^2y^2}{b^2-R^2}+\frac{c^2z^2}{c^2-R^2}=0.$$

Et, en vertu de la réciprocité des propriétés des cônes supplémentaires, le plan tangent au cône (10) est le plan mené par la normale et par le second axe de la section.

Si on laisse constant le second axe R′ de la section diamétrale, la normale décrira le cône

$$(11) \qquad \frac{a^2x^2}{a^2-R'^2}+\frac{b^2y^2}{b^2-R'^2}+\frac{c^2z^2}{c^2-R'^2}=0,$$

lequel a pour plan tangent le plan conduit par la normale et par le premier axe R de la section diamétrale.

Donc les plans tangents aux cônes (10) et (11), suivant une arête commune, se coupent à angle droit; donc les deux séries de cônes (10) et (11) sont telles, que chacun des cônes de la première coupe orthogonalement chacun de ceux de la seconde, et réciproquement.

De plus, tous ces cônes sont homofocaux; en effet, leurs cônes supplémentaires étant des cônes conjoints, M. Chasles a fait voir qu'ils ont tous leurs sections circulaires parallèles aux sections circulaires de l'ellipsoïde; donc tous les cônes représentés par les équations (10) et (11) ont pour lignes focales les normales aux sections circulaires de l'ellipsoïde.

Théorème. — *Les deux séries de cônes* (10) et (11) *coupent la surface des ondes suivant deux séries de co-*

niques sphériques et ellipsoïdales, qui sont aussi des courbes orthogonales.

Les points de la surface des ondes qui se trouvent à une distance du centre constante et égale à R sont sur la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2;$$

mais il résulte de la définition de la surface que ces points sont aussi sur le cône (10), lieu des positions de la normale au plan diamétral de la section dont l'un des axes est égal à R. Donc le cône (10) coupe la surface des ondes suivant une courbe représentée par les deux équations

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} & x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ & \frac{a^2x^2}{a^2 - R^2} + \frac{b^2y^2}{b^2 - R^2} + \frac{c^2z^2}{c^2 - R^2} = 0. \end{aligned} \right.$$

Cette courbe est une conique sphérique. Il est d'ailleurs facile de voir que l'élimination de R entre ces deux équations reproduirait l'équation de la surface des ondes.

Si l'on donne à R toutes les valeurs depuis $R = c$ jusqu'à $R = a$, on voit que la courbe représentée par les équations (12) donnera tous les points de la surface des ondes. Or à cette courbe en répond une tracée sur l'ellipsoïde et qui est fournie par l'intersection de la même sphère et du cône supplémentaire du cône (10). Si on convenait d'appeler coniques sphériques *supplémentaires* celles qui résultent de l'intersection d'une même sphère par deux cônes supplémentaires, on pourrait donner de la surface des ondes une nouvelle définition fort simple et qui permettrait d'obtenir immédiatement son équation. On pourrait dire que :

La surface des ondes est le lieu des coniques sphériques supplémentaires des coniques sphériques tracées sur la surface de l'ellipsoïde.

Tandis que le cône (10) coupe l'une des nappes de la surface des ondes suivant la courbe (12), il coupe la seconde nappe suivant une courbe représentée par les équations

$$\begin{cases} x'^2 + y'^2 + z'^2 = R'^2, \\ \dfrac{a^2 x'^2}{a^2 - R^2} + \dfrac{b^2 y'^2}{b^2 - R^2} + \dfrac{c^2 z'^2}{c^2 - R^2} = 0; \end{cases}$$

mais R' est une quantité variable. On peut mettre ces équations sous une autre forme. Nous savons qu'il existe entre R et R' des relations qui expriment que ces deux quantités sont les racines de l'équation (3). Si dans ces relations on substitue à A, B, C, les coordonnées d'un point de la normale au plan diamétral, on aura

$$(13)\quad \begin{cases} R^2 + R'^2 = \dfrac{a^2(b^2+c^2)x^2 + b^2(a^2+c^2)y^2 + c^2(a^2+b^2)z^2}{a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2}, \\ R^2R'^2 = \dfrac{a^2b^2c^2(x^2+y^2+z^2)}{a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2}. \end{cases}$$

De la seconde de ces deux équations, en y mettant les coordonnées (x', y', z') du point de la normale qui est à une distance R' du centre, on tire

$$a^2x'^2 + b^2y'^2 + c^2z'^2 = \frac{a^2b^2c^2}{R^2},$$

et si on désigne le second membre par P'^2, on voit que le cône (10) coupe la surface suivant une courbe qui est en même temps sur l'ellipsoïde

$$a^2x'^2 + b^2y'^2 + c^2z'^2 = P'^2,$$

en sorte que les équations de cette seconde courbe sont

$$(14)\quad \begin{cases} a^2x'^2 + b^2y'^2 + c^2z'^2 = P'^2, \\ \dfrac{x'^2}{P'^2 - b^2c^2} + \dfrac{y'^2}{P'^2 - a^2c^2} + \dfrac{z'^2}{P'^2 - a^2b^2} = 0. \end{cases}$$

Réciproquement, si (x, y, z) est l'extrémité du rayon vecteur variable et (x', y', z') celle du rayon constant, ces points décriront les courbes suivantes :

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{c} a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = P^2, \\ \dfrac{x^2}{P^2 - b^2c^2} + \dfrac{y^2}{P^2 - a^2c^2} + \dfrac{z^2}{P^2 - a^2b^2} = 0, \end{array} \right.$$

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{c} x'^2 + y'^2 + z'^2 = R'^2, \\ \dfrac{a^2x'^2}{a^2 + R'^2} + \dfrac{b^2y'^2}{b^2 - R'^2} + \dfrac{c^2z'^2}{c^2 - R'^2} = 0. \end{array} \right.$$

D'où il résulte qu'un même point de la surface des ondes se trouve à la fois sur une conique sphérique (12) et sur une conique ellipsoïdale (15).

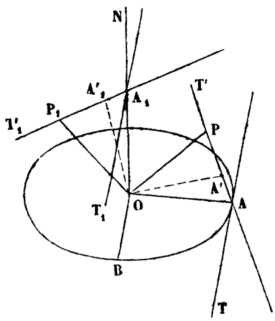
Il est bien facile de voir que ces deux courbes se coupent orthogonalement.

En effet, la tangente à la courbe sphérique, au point (x, y, z), est perpendiculaire au rayon de la sphère (12), ou à l'arête commune des deux cônes orthogonaux (10) et (11); elle est donc perpendiculaire au plan tangent à ce dernier et, par suite, à la tangente à la conique ellipsoïdale qui s'y trouve.

Voici une démonstration géométrique, qui a l'avantage de conduire à une autre propriété très-importante de la surface des ondes.

Soient OA, OB, les deux demi-axes d'une section elliptique, ON la direction de la normale : on doit porter les longueurs OA, OB sur la normale pour avoir des points de la surface des ondes. Occupons-nous du point A. Soit $OA_1 = OA$. Menons au point A la tangente AT à la section elliptique AOB, et une autre tangente à l'ellipsoïde, AT', perpendiculaire à la première.

Si l'axe OA reste constant, il reste comme nous l'avons vu dans le plan OAB, et par suite le point A se meut sur la tangente AT en décrivant un élément de conique sphérique. Mais comme le mouvement du plan tangent à un cône peut être considéré comme une suite de mouve-



ments angulaires autour de l'arête de contact, qui en est l'axe instantané de rotation, il en résulte que pendant le mouvement de l'axe constant OA, l'axe variable OB et la normale ON se déplacent dans un plan BON perpendiculaire à OA. Si au contraire c'est OB qui reste constant, l'axe OA et la normale se déplacent dans le plan AON, ce qui montre, ainsi que nous l'avions déjà vu, que suivant que OA ou OB restent constants, la normale décrit deux cônes orthogonaux.

Mais ceci prouve en outre que les extrémités des axes eux-mêmes décrivent deux séries de courbes se coupant à angle droit; car suivant que OA ou OB sera l'axe constant, le point A se déplacera sur la tangente AT ou sur la tangente AT'. Examinons comment se meut le point A_1 qui lui correspond sur la surface des ondes. Pendant que le point A décrit un élément de conique sphérique, il en est de même du point A_1, et la tangente à ce dernier est parallèle à OB et par suite à AT. Si, au contraire, l'axe OA est variable, le point A se meut sur une courbe qui a pour tangente AT', et le point A_1 sur une courbe qui a pour tangente $A_1T'_1$, située dans le plan AON, et partant perpendiculaire à A_1T_1.

Ceci prouve bien que les deux espèces de coniques décrites par l'extrémité du rayon vecteur de la surface des ondes se coupent à angle droit. Mais on peut remarquer en outre que la tangente $A_1T'_1$, qui est située dans un même plan avec la tangente AT', est perpendiculaire sur cette dernière. Si l'on considère une position de OA infiniment voisine OA' dans le plan AON, et pareillement une position OA'_1 de OA_1, on remarquera sans peine que les deux triangles OAA' et $OA_1A'_1$ sont égaux, et par suite que les deux tangentes AT' et $A_1T'_1$ sont rectangulaires.

Enfin, et c'est la conclusion principale à laquelle je voulais arriver par cette démonstration géométrique, on voit que *le plan tangent à la surface des ondes au point* A_1 *s'obtient en faisant tourner le plan tangent à l'ellipsoïde au point* A, *de* 90° *autour de l'axe* OB.

Cette propriété est une des plus importantes de la surface des ondes. (*La fin prochainement.*)