NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

EUGÈNE BELTRAMI

Solution de la question 637

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 2 (1863), p. 181-184

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__181_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 637

PAR M. EUGÈNE BELTRAMI.

L'énoncé de la question est le suivant :

Les quatre faces d'un tétraèdre passent, chacune, par un point fixe; les trois côtés de l'une des quatre faces sont assujettis à rester, chacun, sur un plan fixe; trouver le lieu géométrique du sommet du tétraèdre opposé à cette face.

Ce lieu est, en général, une surface du troisième degré, qui se réduit à un cône du second degré quand les quatre points fixes sont situés sur un même plan.

R. SALMON.

Soient $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, les équations des trois plans fixes dans lesquels doivent se trouver les côtés de l'une des faces du tétraèdre; (x_0, y_0, z_0) le point par lequel doit toujours passer le plan de cette face; (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) les trois autres points fixes. Nous désignerons ces quatre points par (0), (1), (2), (3), respectivement. Soient, enfin, u_1, v_2, w_3, les valeurs de u, v, w correspondantes aux points (1), (2), (3), respectivement.

Cela posé, désignons par

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

l'équation du plan de la face qui passe par le point (0). L'équation du plan de la face, passant par le point (1), sera de la forme

$$Ax + By + Cz + D + \lambda u = 0,$$

et comme cette dernière équation doit être satisfaite par les coordonnées du point (1), on aura

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D + \lambda u_1 = 0.$$

En éliminant λ entre ces deux équations, on trouve pour le plan de la face du tétraèdre, qui passe par le point (1), l'équation

$$A(ux_1 - u_1 x) + B(uy_1 - u_1 y) + C(uz_1 - u_1 z) + D(u - u_1) = 0.$$

Les plans des deux autres faces, passant par les points (2) et (3), sont représentés par des équations analogues. En éliminant A, B, C, D entre ces trois équations et l'équation

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0,$$

on obtient pour le lieu cherché l'équation

$$(1)\quad \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ ux_1 - u_1 x & uy_1 - u_1 y & uz_1 - u_1 z & u - u_1 \\ vx_2 - v_2 x & vy_2 - v_2 y & vz_2 - v_2 z & v - v_2 \\ wx_3 - w_3 x & wy_3 - w_3 y & wz_3 - w_3 z & w - w_3 \end{vmatrix} = 0.$$

D'où l'on voit immédiatement que ce lieu est du troisième ordre.

On peut transformer l'équation précédente en celle-ci :

$$
(2) \qquad \begin{vmatrix} 1 & x & y & z & 1 \\ 0 & x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ u_1 & ux_1 & uy_1 & uz_1 & u \\ v_2 & vx_2 & vy_2 & vz_2 & v \\ w_3 & wx_3 & wy_3 & wz_3 & w \end{vmatrix} = 0
$$

Puis, en posant

$$
\Delta = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & \alpha_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 & \alpha_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & \alpha_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & \alpha_3 \end{vmatrix} \quad (\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1),
$$

et en développant le déterminant (2) par rapport aux éléments de la première colonne, l'équation (2) se transforme en celle-ci :

$$
(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} uvw\,\Delta = u_1 vw & \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x & y & z & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} \\ + v_2 uw & \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x & y & z & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} \\ + w_3 uv & \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x & y & z & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned} \right.
$$

Lorsque les quatre points (0), (1), (2), (3) sont dans un même plan, représenté par l'équation

$$
p = ax + by + cz + d = 0,
$$

on a, comme on sait, non-seulement $\Delta = 0$, mais aussi

$$\frac{d\Delta}{dx_i} : a = \frac{d\Delta}{dy_i} : b = \frac{d\Delta}{dz_i} : c = \frac{d\Delta}{d\alpha_i} : d = h_i \qquad (i = 0,\ 1,\ 2,\ 3),$$

et l'équation (3) se réduit à

$$\left(h_1 \frac{u_1}{u} + h_2 \frac{v_2}{v} + h_3 \frac{w_3}{w}\right) p = 0.$$

Par suite le lieu se décompose dans le système formé par le plan

$$p = 0$$

et par la surface du second degré

$$h_1 \frac{u_1}{u} + h_2 \frac{v_2}{v} + h_3 \frac{w_3}{w} = 0.$$

Cette surface est évidemment un cône circonscrit au trièdre

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0.$$