J. SACCHI

# Note sur les roulettes

*Nouvelles annales de mathématiques 2e série*, tome 2 (1863), p. 172-181

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__172_1>

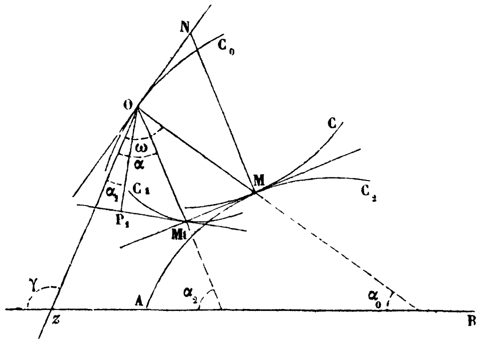
# NOTE SUR LES ROULETTES;

PAR M. J. SACCHI,
Professeur au lycée de Porte-Neuve (Milan).

1. Soient : CM une courbe qui roule sans glisser sur la convexité d'une autre courbe $C_2M$, en transportant dans son mouvement le point O et l'axe $Oz$ invariablement liés à la courbe C;

$C_0O$ la roulette engendrée par le point O; et $C_1M_1$ la podaire de la courbe C, (lieu géométrique des projections orthogonales du point O sur les diverses tangentes à la courbe C);

$OM_1$, $MN$ des perpendiculaires à la tangente commune aux courbes $C$, $C_2$ au point $M$;




$ON$ une tangente à la roulette $C_0$; et $OP_1$ une perpendiculaire à la tangente $P_1M_1$ à la courbe podaire $C_1$;

$BAz$ un axe fixe.

Que l'on nomme :

$$OM = r,\ OM_1 = p,\ OP_1 = p_1,\ MN = N;$$

$s$, $s_0$, $s_1$, $s_2$ les arcs correspondants des courbes $C$, $C_0$, $C_1$, $C_2$, ayant respectivement leurs extrémités variables aux points $M$, $O$, $M_1$, $M$;

$R$, $R_0$, $R_1$, $R_2$ les rayons de courbure de $C$, $C_0$, $C_1$, $C_2$ aux points $M$, $O$, $M_1$, $M$;

$\rho$, $\rho_0$, $\rho_1$ les rayons de courbure des développées de $C$, $C_0$, $C_1$ aux points correspondants à $M$, $O$, $M_1$;

$\omega$, $\alpha$, $\alpha_1$ les angles que les droites $r$, $p$, $p_1$ forment avec $Oz$;

$\gamma$, $\alpha_0$, $\alpha_2$ les angles que les droites $Oz$, $r$, $p$ forment avec l'axe $BAz$.

On suppose que tous ces angles soient évalués de manière qu'ils croissent avec les arcs des courbes auxquelles ils se rapportent.

2. Dans un mouvement *très-petit*, pendant lequel un élément de la courbe C vient en contact avec un élément égal de la courbe $C_2$, *base* de la roulette, le point O décrira autour du point M un petit arc circulaire $OO_1$, ayant le rayon $r$; l'angle $MOz$ prendra une nouvelle position $MO_1z_1$, et l'angle $OMO_1$ sera égal à l'angle des côtés $Oz$, $O_1z_1$, c'est-à-dire égal à $(\gamma+\mu)-\gamma$, en désignant par $\mu$ l'accroissement très-petit de $\gamma$. Donc, la droite $r$ sera normale à la roulette en O; de plus, on aura $\frac{OO_1}{\mu}=r$, et, en passant à la limite, $\frac{ds_0}{d\gamma}=r$. En désignant au moyen d'un accent les dérivées par rapport à une variable quelconque, on a :

$$s'_0 = r\gamma', \tag{1}$$

relation très-simple, et fondamentale dans la théorie des roulettes.

3. En prenant les dérivées des équations évidentes :

$$\alpha_0=\gamma-\omega,\quad \alpha_2=\gamma-\alpha;$$

substituant, dans ces dérivées, à $\gamma'$ sa valeur donnée par l'équation (1); et observant, de plus, que par la nature du mouvement $s_2=s$, et qu'en général

$$\alpha'_n=\pm\frac{s'_n}{R_n},\quad \omega'=\pm\frac{s'}{N}, \tag{2}$$

formules dans lesquelles on prend le signe supérieur si l'arc croît avec l'angle, et le signe inférieur dans le cas contraire, on aura :

$$\frac{s'_0}{s'}=\frac{1}{N\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_0}\right)},\quad \frac{s'_0}{s'}=r\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_2}\right), \tag{3}$$

d'où

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{N}=\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_0}\right)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_2}\right). \tag{4}$$

De cette dernière équation on tire

$$R_0 = \frac{rN}{N - L}, \quad \text{en posant} \quad \frac{RR_2}{R + R_2} = L.$$

Au moyen de ces relations on peut facilement construire L, et par suite $R_0$.

Si, dans la première des équations (3), on remplace $\frac{1}{N}$ par sa valeur $\frac{\omega'}{s'}$, on obtient :

$$\frac{d\omega}{ds_0} = \frac{1}{r} - \frac{1}{R_0},$$

relation due à M. Catalan (*Nouv. Ann.*, t. XV, p. 102).

4. On sait que pour la courbe podaire on a les équations

$$(5) \qquad s'_1 = r\alpha' = r\frac{s'}{R},$$

et que les deux angles que les droites $r$ et $p_1$ forment avec $p$ sont égaux ; par conséquent :

$$\omega - \alpha = \alpha - \alpha_1, \quad \text{ou bien} \quad \alpha_2 - \alpha_0 = \alpha - \alpha_1.$$

En prenant la dérivée de cette dernière équation, et de l'équation $\alpha_2 = \gamma - \alpha$, eu égard aux relations (1), (2), (5) et à $s_2 = s$, on obtient

$$s'_0 = s'_1\left(\frac{R}{rR_2} + \frac{1}{R_1} - \frac{1}{r}\right)R_0,$$

et

$$(6) \qquad s'_0 = s'_1\left(1 + \frac{R}{R_2}\right).$$

De ces relations on déduit :

$$(7) \qquad \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_0} - \frac{1}{r} = \frac{R}{R_2}\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{r}\right),$$

égalité remarquable, qui, avec l'équation (4), fournit la relation suivante, entre les rayons de courbure des quatre courbes C, $C_0$ $C_1$, $C_2$, et la normale N de la première :

$$(8)\qquad N(2R_1 - R_0) = R\left(R_1 - R_0\frac{R_2}{R+R_2}\right).$$

5. En supposant que la base $C_2$ soit une droite, on aura $\frac{1}{R_2} = 0$, et les équations (6), (7), (4), (8) donnent

$$(9)\qquad s'_0 = s'_1,\quad \frac{1}{r} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_0},$$

$$(10)\qquad R_0 = \frac{rN}{N-R},\quad R_1 = R_0\frac{N-R.}{2N-R}.$$

La première de ces relations est due à M. Steiner (*Nouvelles Annales*, t. XVIII, p. 342), et la seconde donne le théorème suivant :

*Le rayon vecteur réciproque d'une courbe plane est égal à la différence des rayons réciproques de courbure de la podaire et de la roulette de la même courbe, la podaire étant déterminée par rapport au point* origine *des rayons vecteurs, et la roulette étant à base rectiligne et engendrée par le même point.*

Substituant dans la première des équations (10) les valeurs connues

$$(11)\qquad N = \frac{r^2}{p},\quad R = \frac{rr'}{p'},$$

on a

$$p' = \left(\frac{p}{r}\right)' R_0,$$

équation qui donne

$$(12)\qquad \frac{dp}{d\alpha_0} = R_0\cos\alpha_0,\quad \text{en ayant}\quad p = r.\sin\alpha_0.$$

Posant $\sqrt{r^2 - p^2} = q$, et désignant par un accent la dérivée relative à $\alpha$, on sait que

(13) $$p' = q, \quad rr' = q\mathrm{R}.$$

Et, des équations (2), (9), (5), on tire les suivantes :

$$\alpha'_0 = \frac{r}{\mathrm{R}_0}, \quad \alpha'_1 = \frac{r}{\mathrm{R}_1},$$

lesquelles, au moyen de la formule connue $\mathrm{R}'_n = \rho_n . \alpha'_n$, donnent

(14) $$\mathrm{R}'_0 = \rho_0 \frac{r}{\mathrm{R}_0}, \quad \mathrm{R}'_1 = \rho_1 \frac{r}{\mathrm{R}_1}, \quad \mathrm{R}' = \rho.$$

Maintenant, des équations (10), (11), on déduit

$$\mathrm{R}_0 (r^2 - p\mathrm{R}) = r^3, \quad \mathrm{R}_1 (2r^2 - p\mathrm{R}) = r^3;$$

et, en prenant les dérivées par rapport à $\alpha$, et en ayant égard aux relations (13), (14), on obtient

$$r^4\rho_0 - p\rho\mathrm{R}_0^3 - q\mathrm{R}\mathrm{R}_0^2 (3r - \mathrm{R}_0) = 0,$$
$$r^4\rho_1 - p\rho\mathrm{R}_1^3 - 3q\mathrm{R}\mathrm{R}_1^2 (r - \mathrm{R}_1) = 0.$$

Éliminant $p$, $q$, $r$ des quatre dernières équations et de l'équation $q^2 = r^2 - p^2$, on a les deux relations suivantes entre les rayons de courbure des trois courbes C, $\mathrm{C}_0$, $\mathrm{C}_1$, et de leurs développées :

(15) $$\left\{\begin{aligned} &\frac{\rho_0}{\mathrm{R}_0^3}\cdot\frac{3}{\mathrm{R}_0} + \frac{\rho_1}{\mathrm{R}_1^3}\left(\frac{1}{\mathrm{R}_1} - \frac{4}{\mathrm{R}_0}\right) - \frac{\rho}{\mathrm{R}}\left(\frac{1}{\mathrm{R}_1} - \frac{2}{\mathrm{R}_0}\right)\left(\frac{1}{\mathrm{R}_1} - \frac{1}{\mathrm{R}_0}\right)^2 = 0,\\ &\left(\frac{\rho_0}{\mathrm{R}_0^3} - \frac{\rho_1}{\mathrm{R}_1^3}\right)^2 + \left(\frac{1}{\mathrm{R}_1} - \frac{2}{\mathrm{R}_0}\right)^2\left(\frac{1}{\mathrm{R}_1} - \frac{1}{\mathrm{R}_0}\right)^2 - \mathrm{R}^2\left(\frac{1}{\mathrm{R}_1} - \frac{1}{\mathrm{R}_0}\right)^6 = 0.\end{aligned}\right.$$

Soit $a^m p = r^{m+1}$ l'équation de la courbe mobile; cette équation représente une des lignes suivantes : *circonférence, droite, lemniscate de Bernoulli, hyperbole équilatère, cardioïde, parabole, caustique par réflexion* de la parabole, *les rayons incidents étant perpendiculaires à l'axe*, etc.; selon que l'on donne à $m$ les valeurs :

$$1,\ -1,\ 2,\ -2,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \text{etc.}$$

(Voir *Nouvelles Annales*, t. XIX, *Bulletin*, p. 39.)

On aura, d'après les équations (10), (11),

$$R = \frac{N}{m+1},\quad R_0 = \frac{m+1}{m}\, r,\quad R_1 = \frac{m}{2m+1}\, R_0;$$

et par conséquent, en ayant égard aux équations (14),

$$\rho_1 = \left(\frac{m}{2m+1}\right)^2 \rho_0;$$

les deux premières donnent une règle facile pour construire les rayons R et $R_0$; et en plaçant les deux dernières valeurs dans les équations (15), on obtient

$$\frac{m.\rho_0}{R_0} = \left(\frac{1+m}{1-m}\right)\frac{\rho}{R},\quad \left(\frac{m+1}{m}\right)^4 R^2 = \frac{1}{m^2}\, R_0^2 + \rho_0^2.$$

La seconde des deux relations précédentes, dans le cas particulier $m = -\frac{1}{2}$, c'est-à-dire dans le cas où la roulette est la chaînette engendrée par le foyer d'une parabole, donne le théorème de M. Lamarle, démontré aussi par M. Mannheim (*Nouvelles Annales*, t. XVIII, p. 375).

6. Quand la base de la roulette est une droite et que le rayon $R_0$ est donné en fonction de $\alpha_0$, on obtient les équations

$$\varphi(p, r) = 0,\quad \psi(p_0, \alpha_0) = 0$$

de la courbe mobile et de la roulette au moyen des relations (12) et de la formule connue

$$\frac{d^2 p_0}{d\alpha_0^2} + p_0 = R_0.$$

Si l'on connaît l'équation $\varphi(p, r) = 0$, on trouve promptement l'équation différentielle de la roulette, en posant dans cette dernière $p = y$, $r = y\frac{ds}{dx}$.

Réciproquement, si dans l'équation $f\left(y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ de la roulette, on pose

$$(16) \qquad y = p, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{r^2 - p^2}}{p},$$

on aura l'équation $\varphi(p, r) = 0$ de la courbe mobile.

Par exemple, soit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

En tirant la valeur de $x$ et prenant la dérivée, on a

$$b^2(b^2 - y^2) = a^2 y^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

et au moyen des relations (16) :

$$(a^2 - b^2)\, p^2 = a^2 r^2 - b^4,$$

équation d'une épicycloïde rapportée au centre du cercle fixe.

De même, en prenant pour équations des roulettes

$$y = mx - b, \quad y^2 = 2ax + b^2,$$

on trouve

$$r = \sqrt{m^2 + 1}\,.p, \quad r^2 = p^2 + a^2.$$

La première de ces équations représente la spirale logarithmique rapportée au point asymptotique; et la seconde représente une développante du cercle, rapportée au centre.

7. Si l'on suppose que la base $C_2$ de la roulette soit égale à la courbe mobile C, on aura $R_2 = R$, et les équations (6), (7), (14) donneront :

$$s'_0 = 2.s'_1, \quad R_0 = 2R_1, \quad \rho_0 = 4\rho_1.$$

De plus, en nommant $p_0$, $q_0$, $r_0$; $p_2$, $q_2$, $r_2$, les droites analogues à $p$, $q$, $r$, et qui se rapportent aux courbes $C_0$ et $C_2$, en prenant l'origine en un point $O_2$, on obtient aisément

$$(p_0 - r)^2 + r_0^2 - p_0^2 = r_2^2, \quad (q_2 - q)^2 + (p_2 + p)^2 = r_0^2;$$

et ces relations, dans le cas où les points O et $O_2$ sont semblablement placés à l'égard des deux courbes égales C, $C_2$, c'est-à-dire dans le cas où $p_2 = p$, $q_2 = q$, $r_2 = r$, donnent

$$(17) \qquad r = \frac{1}{2}\frac{r_0^2}{p_0}, \quad p = \frac{1}{2} r_0.$$

En substituant ces valeurs à $r$, $p$ dans l'équation $\varphi(p, r) = 0$ de la courbe mobile, on a celle de la roulette.

Les formules (17) font connaître (*voir* l'ouvrage cité dans les *Nouvelles Annales*, t. XIX, p. 33) que la roulette est semblable à la podaire de la courbe mobile, et est aussi égale à la courbe nommée par M. Quetelet, *caustique secondaire* de la courbe mobile, le point lumineux étant celui qui engendre la roulette.

Par conséquent, sachant (ouvrage précité) que les podaires prises par rapport *à l'origine* des courbes suivantes :

*Circonférence*, origine en un point quelconque; *spirale logarithmique*, origine au point asymptotique; *hyperbole* *équilatère*, origine au centre; *épicycloïde*, origine au centre du cercle fixe; *ellipse*, origine à l'un des foyers; *parabole*, origine au foyer, ou bien au sommet, etc.,

Sont, par ordre, ces autres lignes :

*Conchoïde circulaire, spirale logarithmique, lemniscate de Bernoulli, épitrochoïde, circonférence, droite*, ou bien *cissoïde de Dioclès*, etc.,

On pourra immédiatement conclure quelle est la roulette engendrée par l'origine de l'une des premières courbes, lorsque cette courbe roule sur une courbe qui lui est égale.