LÉON LHUILLIER

Solution de la question 639

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 2 (1863), p. 149-151

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__149_0>

SOLUTION DE LA QUESTION 639;

PAR M. LÉON LHUILLIER,
Elève à Nancy.

ÉNONCÉ. — *Trouver sur la surface d'un paraboloïde hyperbolique le lieu géométrique d'un point tel, que les deux génératrices rectilignes menées par ce point fassent un angle donné.*

Cas particulier où l'angle donné est droit.

Soient

$$\frac{y}{\sqrt{p}}+\frac{z}{\sqrt{p'}}=\lambda,\quad \frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{p'}}=\frac{x}{\lambda},$$

et

$$\frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{p'}}=\mu,\quad \frac{y}{\sqrt{p}}+\frac{z}{\sqrt{p'}}=\frac{x}{\mu},$$

les équations de deux génératrices rectilignes menées par un point de la surface.

Si l'on représente par φ l'angle donné, et par a, b, a', b' les coefficients angulaires des projections de ces génératrices, la condition de l'énoncé se traduit par l'équation

$$\cos\varphi=\frac{aa'+bb'+1}{\sqrt{a^2+b^2+1}\sqrt{a'^2+b'^2+1}}.$$

Or, on a

$$a=-\frac{2\lambda}{\sqrt{p'}},\quad b=-\sqrt{\frac{p}{p'}};\qquad a'=\frac{2\mu}{\sqrt{p'}},\quad b'=\sqrt{\frac{p}{p'}};$$

la condition devient donc

$$\cos\varphi=\frac{p'-p-4\lambda\mu}{\sqrt{(4\lambda^2+p+p')(4\mu^2+p+p')}}$$

ou

$$[16\lambda^2\mu^2+4(p+p')(\lambda^2+\mu^2)+(p+p')^2]\cos^2\varphi=(4\lambda\mu+p-p')^2.$$

Substituant dans cette équation à λ et μ les valeurs $\frac{y}{\sqrt{p}}+\frac{z}{\sqrt{p'}}$ et $\frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{p'}}$, il vient

$$\left[16\left(\frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{p'}\right)^2+8(p+p')\left(\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{p'}\right)+(p+p')^2\right]\cos^2\varphi$$
$$=\left[4\left(\frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{p'}\right)+p-p'\right]^2.$$

Cette dernière équation simplifiée en vertu de la relation $\frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{p'}=x$, qui est satisfaite pour tous les points du lieu, devient

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}&\left[16x^2+8(p+p')\left(x+\frac{2z^2}{p'}\right)+(p+p')^2\right]\cos^2\varphi\\&=(4x+p-p')^2.\end{aligned}\right.$$

Les points cherchés sont donc à l'intersection du paraboloïde et du cylindre hyperbolique représenté par l'équation précédente.

Dans le cas particulier où l'angle donné φ est droit, l'équation (1) se réduit à $(4x+p-p')=0$; elle représente un plan perpendiculaire à l'axe du paraboloïde, et qui coupe, par conséquent, la surface suivant une hyperbole. Si $p=p'$, ce plan devient le plan tangent au sommet; le lieu des points communs à ce plan et au paraboloïde se forme des deux génératrices rectilignes menées par le sommet de la surface.

Dans tous les cas, le plan $4x+p-p'=0$ est le lieu géométrique des sommets des trièdres trirectangles circonscrits au paraboloïde. Il suffit, pour s'en assurer, d'ajouter, en tenant compte des relations qui expriment que trois plans sont rectangulaires, les équations des trois plans tangents de la forme

$$4x\cos^2\alpha + 4y\cos\alpha\cos\beta + 4z\cos\alpha\cos\gamma = p'\cos^2\gamma - p\cos^2\beta.$$

On trouve aisément $4x = p' - p$.