HARANG

Solutions des questions 608 et 637

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 2 (1863), p. 145-148

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__145_0>

SOLUTIONS DES QUESTIONS 608 ET 637

(voir 2e série, t. Ier, p. 30, et t. II, p. 24),

PAR M. HARANG,
Élève en mathématiques spéciales du lycée de Douai
(classe de M. Painvin).

Question 608.

Énoncé. — Posons

$$(1)\quad K = 4(ae - 4bd + 3c^2)(bf - 4ce + 3d^2) - (af - 3be + 2cd)^2,$$

$$(2)\quad H = b^2 - ac,$$

$$(3)\quad I = ae - 4bd + 3c^2,$$

$$(4)\quad J = ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3.$$

Alors

$$(5)\qquad \frac{1}{4}\left(\frac{dK}{df}\right)^2 = 4HI^2 - 12aIJ - a^2K.$$

(MICHAEL ROBERTS.)

Prenons la dérivée de (1) par rapport à f :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dK}{df}\right) = 2(ae - 4bd + 3c^2)\,b - (af - 3be + 2cd)\,a,$$

ou

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dK}{df}\right) = 2bI - a(af - 3be + 2cd).$$

Élevons au carré :

$$\frac{1}{4}\left(\frac{dK}{df}\right)^2 = 4b^2I^2 - 4abI(af - 3be + 2cd) + a^2(af - 3be + 2cd)^2.$$

Il faut donc démontrer que

$$\begin{aligned} &4b^2I^2 - 4abI(af - 3be + 2cd) + a^2(af - 3be + 2cd)^2 \\ &= 4HI^2 - 12aIJ - a^2[4I(bf - 4ce + 3d^2)] + a^2(af - 3be + 2cd)^2. \end{aligned}$$

En supprimant le terme commun $a^2(af-3be+2cd)^2$, et en remplaçant H par sa valeur b^2-ac, cette égalité se réduit à

$$-4abI(af-3be+2cd)$$
$$=-4acI^2-12aIJ-a^2[4I(bf-4ce+3d^2)],$$

ou

$$b(af-3be+2cd)=cI+3J+a(bf-4ce+3d^2).$$

Substituant à I sa valeur $ae-4bd+3c^2$, il vient

$$b(af-3be+2cd)=ace-4bcd+3c^3+3J+a(bf-4ce+3d^2),$$

d'où

$$J=ace+2bcd-ad^2-eb^2-c^3.$$

Ce qui est vrai d'après l'équation (4).

Question 637.

ÉNONCÉ. — *Les quatre faces d'un tétraèdre* ABCD *passent chacune par un point fixe; les trois côtés* AB, AC, CB *de l'une des quatre faces sont assujettis à rester chacun sur un plan fixe: trouver le lieu géométrique du sommet,* D, *du tétraèdre, opposé à cette face.*

Ce lieu est en général une surface du troisième degré, qui se réduit à un cône du second degré quand les quatre points fixes sont situés sur un même plan.

(R. SALMON.)

Je prendrai pour plans de coordonnées les trois plans fixes. Les équations des côtés AB, AC, CB, situés dans ces plans, sont alors,

$$\text{AB}\ldots\ldots\left\{\begin{array}{c} z=0, \\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}-1=0 \end{array}\right\};$$

$$\text{AC} \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{c} y = 0, \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} - 1 = 0 \end{array} \right\};$$

$$\text{CB} \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{c} x = 0, \\ \dfrac{z}{c} + \dfrac{y}{b} - 1 = 0 \end{array} \right\}.$$

Soient (α, β, γ), $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$, les coordonnées des quatre points fixes. Le plan CDA aura pour équation

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} - 1 + \lambda y = 0.$$

Il doit passer par le point $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, donc

$$\frac{\alpha_1}{a} + \frac{\gamma_1}{c} - 1 + \lambda\beta_1 = 0,$$

d'où

$$\lambda = -\frac{\dfrac{\alpha_1}{a} + \dfrac{\gamma_1}{c} - 1}{\beta_1}.$$

L'équation du plan CDA est donc

$$(1) \qquad \frac{1}{a}(\beta_1 x - \alpha_1 y) + \frac{1}{c}(\beta_1 z - \gamma_1 y) + y - \beta_1 = 0.$$

De même, l'équation du plan BCD, passant par la droite BC et par le point $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, sera

$$(2) \qquad \frac{1}{b}(\alpha_2 y - \beta_2 x) + \frac{1}{c}(\alpha_2 z - \gamma_2 x) + x - \alpha_2 = 0;$$

et le plan BDA aura pour équation

$$(3) \qquad \frac{1}{a}(\gamma_3 x - \alpha_3 z) + \frac{1}{b}(\gamma_3 y - \beta_3 z) + z - \gamma_3 = 0.$$

Les quatre points A, B, C, (α, β, γ) sont dans un même plan, on a donc

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 0 & c & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire

$$(4) \qquad \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} - 1 = 0 \ (^*).$$

Pour avoir l'équation du lieu cherché, il suffit d'éliminer $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ entre les équations (1), (2), (3), (4); le lieu aura donc pour équation

$$\begin{vmatrix} 0 & (\alpha_2 y - \beta_2 x) & (\alpha_2 z - \gamma_2 x) & (x - \alpha_2) \\ (\beta_1 x - \alpha_1 y) & 0 & (\beta_1 z - \gamma_1 y) & (y - \beta_1) \\ (\gamma_3 x - \alpha_3 z) & (\gamma_3 y - \beta_3 z) & 0 & z - \gamma_3 \\ \alpha & \beta & \gamma & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui représente une surface du troisième degré (**).

(*) L'équation (4) s'obtient immédiatement en observant que le plan ABC a pour équation

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0,$$

et que le point (α, β, γ) est sur ce plan. P.

(**) Il reste à prouver que le lieu se réduit à un cône du second degré quand les quatre points donnés sont situés dans un même plan. P.