

ABEL TRANSON

**Sur une question relative à la
géométrie de l'espace**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 2
(1863), p. 138-143

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__138_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR UNE QUESTION RELATIVE A LA GÉOMÉTRIE
DE L'ESPACE;**

PAR M. ABEL TRANSON.

L'article de M. Baehr, ci-dessus, p. 35, m'engage à revenir sur la question proposée au concours d'agrégation de l'année 1849.

Il s'agissait de trouver la condition pour que des droites, issues des différents points d'une surface donnée S , avec des cosinus de direction exprimés par les fonctions X, Y, Z , soient normales à une même surface.

La condition indiquée par M. Dieu (rappelée ci-dessus, p. 47) me paraît manquer de généralité. En effet, elle exige que la fonction différentielle $X dx + Y dy + Z dz$ satisfasse à la condition connue d'intégrabilité. Or, en étudiant les propriétés d'un *ensemble de droites menées de tous les points de l'espace suivant une loi continue*, j'ai montré ailleurs (*) qu'il existe une infinité de surfaces satisfaisant à la condition du concours de 1849, c'est-à-dire au moyen desquelles les droites en question se groupent en systèmes normaux à des surfaces déterminées; et cela sans que les fonctions X, Y, Z soient assujetties à aucune condition, notamment sans que la condition d'intégrabilité doive être satisfaite.

D'ailleurs je m'empresse d'ajouter que M. Dieu lui-même a donné dans son travail (*Nouvelles Annales*, t. XI, p. 66-70) la vraie condition des surfaces S sous la forme (1)

$$D_y(X + pZ) = D_z(Y + qZ),$$

qui, développée, devient l'équation linéaire aux différentielles partielles

$$\left(\frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy}\right)p + \left(\frac{dZ}{dx} - \frac{dX}{dz}\right)q = \frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx};$$

de sorte que si $F = 0$ est l'équation de l'une des surfaces demandées, la fonction F doit satisfaire à la condition

$$\begin{aligned} \left(\frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy}\right)\frac{dF}{dx} + \left(\frac{dF}{dx} - \frac{dY}{dz}\right)\frac{dF}{dy} \\ + \left(\frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx}\right)\frac{dF}{dz} = 0. \end{aligned}$$

Telle est l'unique condition des surfaces S dont l'exis-

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, XXXVIII^e cahier.

tence en nombre illimité se trouve ainsi démontrée. Mais M. Dieu ne s'arrête pas à développer la condition (1); il la suppose à tort relative exclusivement à quelque forme particulière de l'équation des surfaces S. Cependant la condition à laquelle il s'arrête finalement ne demeure vraie que sous la réserve d'être énoncée comme il suit :

Si le trinôme $Xdx + Ydy + Zdz$ satisfait à la condition d'intégrabilité, il faut que le facteur propre à le rendre intégrable soit, en vertu de l'équation de la surface donnée, une fonction de l'intégrale.

C'est alors un théorème dont la démonstration repose sur une propriété remarquable du facteur d'intégrabilité de la fonction différentielle $Xdx + Ydy + Zdz$, savoir que μ étant ce facteur, U étant l'intégrale et F une fonction satisfaisant à la condition (2)

$$\left(\frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy}\right) \frac{dF}{dx} + \left(\frac{dZ}{dx} - \frac{dX}{dz}\right) \frac{dF}{dy} + \left(\frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx}\right) \frac{dF}{dz} = 0,$$

μ est nécessairement une fonction de U et de F.

Imaginons en effet qu'on ait porté dans μ les valeurs de x et y tirées des équations

$$U = \varphi(x, y, z), \quad F = \psi(x, y, z),$$

il est aisé de voir que μ ne contiendra plus z , c'est-à-dire que sa dérivée prise par rapport à z sans faire varier U ni F sera nulle.

Cette dérivée ainsi définie est

$$\left(\frac{d\mu}{dz}\right) = \frac{d\mu}{dx} \frac{dx}{dz} + \frac{d\mu}{dy} \frac{dy}{dz} + \frac{d\mu}{dz},$$

dans laquelle $\frac{dx}{dz}$ et $\frac{dy}{dz}$ seront tirées des deux équations

$$\frac{dU}{dx} \frac{dx}{dz} + \frac{dU}{dy} \frac{dy}{dz} + \frac{dU}{dz} = 0,$$

$$\frac{dF}{dx} \frac{dx}{dz} + \frac{dF}{dy} \frac{dy}{dz} + \frac{dF}{dz} = 0.$$

Or, on pourra remplacer dans la première les quantités $\frac{dU}{dx}$, $\frac{dU}{dy}$, $\frac{dU}{dz}$ par les quantités proportionnelles X, Y, Z, et alors, si l'on a égard à la condition d'intégrabilité

$$\left(\frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dy} \right) X + \left(\frac{dZ}{dx} - \frac{dX}{dz} \right) Y + \left(\frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx} \right) Z = 0,$$

aussi bien qu'à l'équation ci-dessus (2) qui assujettit F, on reconnaîtra aisément que les valeurs de $\frac{dx}{dz}$ et $\frac{dy}{dz}$ sont respectivement égales à

$$\frac{\frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy}}{\frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx}}, \quad \frac{\frac{dZ}{dx} - \frac{dX}{dz}}{\frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx}},$$

lesquelles étant reportées dans la valeur de $\left(\frac{d\mu}{dz} \right)$ donnent un résultat qui est identiquement nul d'après les conditions auxquelles doit satisfaire le facteur d'intégrabilité.

Revenons maintenant à la surface requise par le concours de 1849. On voit que si l'équation de cette surface rend le facteur d'intégrabilité une fonction de l'intégrale lorsque le facteur d'intégrabilité et par suite l'intégrale existent; c'est que dans tous les cas, c'est-à-dire que le facteur existe, ou non, la surface demandée est de celles qui satisfont à l'équation (2).

Théorème à démontrer.

Lorsque plusieurs forces situées dans un même plan tournent ensemble d'un même angle autour de leurs points d'application respectifs, on sait que la résultante tourne du même angle autour d'un point fixe qu'on appelle *centre des forces*. C'est une généralisation de la propriété du *centre des forces parallèles*.

Supposons maintenant qu'une première force P tourne dans le plan commun en demeurant tangente à un cercle fixe de rayon r ; qu'une seconde force P' tourne du même angle en demeurant tangente à un autre cercle r' , et ainsi des autres. La résultante de ces forces tournera aussi d'un même angle autour d'un cercle facile à déterminer.

1° Le cercle directeur de la résultante aura pour centre le point qui serait le centre des forces P si les rayons de leurs cercles respectifs s'évanouissaient; 2° il aura le même rayon que si tous les cercles directeurs des forces, en conservant leurs rayons, devenaient concentriques.

Ce théorème conduit à la question suivante : Soit un ensemble de forces situées dans un même plan et tournant simultanément du même angle en demeurant tangentes à des courbes directrices; leur résultante tournera du même angle en demeurant tangente à une certaine courbe qu'on appellera la *directrice résultante*. Et si, dans une situation particulière du système, on considère les cercles osculateurs des directrices composantes, auront-ils avec le cercle osculateur de la directrice résultante les mêmes relations de position et de grandeur qu'auraient des cercles directeurs composants avec un cercle directeur résultant?

(143)

En cas d'affirmative, il serait intéressant d'illustrer le théorème par quelque exemple où la directrice résultante serait déduite des directrices composantes.