

E. CATALAN

**Sur un problème d'algèbre légale et sur  
une transformation de série**

*Nouvelles annales de mathématiques 2<sup>e</sup> série*, tome 2  
(1863), p. 107-111

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1863\\_2\\_2\\_\\_107\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__107_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

**SUR UN PROBLÈME D'ALGÈBRE LÉGALE (\*) ET SUR UNE  
TRANSFORMATION DE SÉRIE;**

PAR M. E. CATALAN.

---

Communiqué à la Société Philomathique, séance du 29 mars 1862.

---

I. D'après le Code civil (art. 757), *le droit de l'enfant naturel est d'un tiers de la portion héréditaire qu'il aurait eue, s'il eût été légitime (\*\*).*

---

(\*) Voir, pour ce problème, Quillet, *Nouvelles Annales*, t. IV, p. 253, et Louis Gros, t. X, p. 27.

(\*\*) Cette partie de l'article 757 se rapporte au cas du partage entre enfants légitimes et enfants naturels. Lorsque des enfants naturels concourent avec des ascendants ou des collatéraux, la loi a des conséquences bizarres et même absurdes, dont je ne parlerai pas ici. (Voyez une brochure intitulée : *L'Article 757, — Application de l'Algèbre au Code civil.*)

Soient :  $l$  le nombre des enfants légitimes ;  $n$  le nombre des enfants naturels ;  $x_{l,n}$  la part d'un enfant légitime ;  $y_{l,n}$  la part d'un enfant naturel.

On a d'abord, en prenant pour unité la somme à partager entre les  $l + n$  enfants,

$$(1) \quad lx_{l,n} + ny_{l,n} = 1.$$

D'un autre côté, conformément à la prescription ci-dessus,

$$(2) \quad y_{l,n} = \frac{1}{3} x_{l+1, n-1}.$$

De ces deux relations, on conclut aisément la formule suivante, connue depuis longtemps (\*),

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{l,n} = \frac{1}{l} - \frac{n}{3l(l+1)} + \frac{n(n-1)}{3^2 l(l+1)(l+2)} - \dots \\ \quad \pm \frac{n(n-1)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{3^n l(l+1)\dots(l+n)}. \end{array} \right.$$

II. La complication de cette formule est peut-être ce qui empêche les jurisconsultes d'obéir, sinon à l'esprit, du moins au texte de la loi, quand il s'agit pour eux d'effectuer un partage entre enfants légitimes et enfants naturels. Mais on peut la remplacer par une autre expression beaucoup plus commode.

On a en effet

$$\frac{1}{l(l+1)(l+2)\dots(l+p)} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p} \int_0^1 (1-\theta)^p \theta^{l-1} d\theta;$$

---

(\*) Elle a été donnée d'abord par M. Cournot (*Bulletin de Férussac*, t. XVI, p. 3).

donc

$$\begin{aligned}
 x_{l,n} &= \int_0^1 \theta^{l-1} d\theta \left[ 1 - \frac{1}{3} \frac{n}{1} (1 - \theta) + \frac{1}{3^2} \frac{n(n-1)}{1.2} (1 - \theta)^2 - \dots \right. \\
 &\quad \left. \pm \frac{1}{3^n} (1 - \theta)^n \right] \\
 &= \frac{1}{3^n} \int_0^1 \theta^{l-1} (2 + \theta)^n d\theta;
 \end{aligned}$$

d'où enfin

$$(4) \left\{ \begin{aligned}
 x_{l,n} &= \frac{1}{3^n} \left[ 2^n \frac{1}{l} + \frac{n}{1} 2^{n-1} \frac{1}{l+1} + \frac{n(n-1)}{1.2} 2^{n-2} \frac{1}{l+2} + \dots \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{l+n} \right].
 \end{aligned} \right.$$

Il est visible que, pour former la quantité entre parenthèses, il suffit de développer  $(2 + \theta)^n$  et de diviser par  $l, l + 1, l + 2, \dots, l + n$  les termes du développement. Du reste, il est facile de vérifier, par un procédé purement algébrique, l'équivalence des deux expressions de  $x_{l,n}$ .

III. Cette équivalence étant démontrée, il en résulte que l'on a

$$(5) \left\{ \begin{aligned}
 &\frac{1}{l} - \frac{n}{l(l+1)} z + \frac{n(n-1)}{l(l+1)(l+2)} z^2 \\
 &\quad - \frac{n(n-1)(n-2)}{l(l+1)(l+2)(l+3)} z^3 + \dots \\
 &= (1-z)^n \left[ \frac{1}{l} + \frac{n}{1} \frac{1}{l+1} \left( \frac{z}{1-z} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{n(n-1)}{1.2} \frac{1}{l+2} \left( \frac{z}{1-z} \right)^2 + \dots \right],
 \end{aligned} \right.$$

même quand les deux membres, au lieu d'être composés d'un nombre fini de termes, deviennent des séries con-

*vergentes*. Par exemple, en supposant

$$l = 1, \quad n = -1, \quad z = \frac{1}{2},$$

on trouve

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} \right)^3 + \dots \\ = 2 \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \right); \end{aligned}$$

ce qui est exact.

IV. Si l'on pose

$$\frac{z}{1-z} = -t,$$

d'où résulte

$$z = \frac{-t}{1-t},$$

l'équation (5) devient

$$\begin{aligned} \frac{1}{l} - \frac{n}{1} \frac{1}{l+1} t + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \frac{1}{l+2} t^2 - \dots \\ = (1-t)^n \left[ \frac{1}{l} + \frac{n}{l(l+1)} \frac{z}{1-t} + \frac{n(n-1)}{l(l+1)(l+2)} \left( \frac{t}{1-t} \right)^2 + \dots \right]; \end{aligned}$$

ou plutôt, par le changement de  $t$  en  $z$  :

$$(6) \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{l} - \frac{n}{1} \frac{1}{l+1} z + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \frac{1}{l+2} z^2 - \dots \\ & = (1-z)^n \left[ \frac{1}{l} + \frac{n}{l(l+1)} \frac{z}{1-z} + \frac{n(n-1)}{l(l+1)(l+2)} \left( \frac{z}{1-z} \right)^2 + \dots \right]. \end{aligned} \right.$$

Cette seconde transformation est, pour ainsi dire, *conjuguée* de la première. On peut les renfermer dans la

double formule :

$$(7) \left\{ \begin{aligned} (1-z)^n &= \frac{\frac{1}{l} - \frac{n}{1} \frac{1}{l+1} z + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \frac{1}{l+2} z^2 - \dots}{\frac{1}{l} + \frac{n}{l(l+1)} \frac{z}{1-z} + \frac{n(n-1)}{l(l+1)(l+2)} \left(\frac{z}{1-z}\right)^2 + \dots} \\ &= \frac{\frac{1}{l} - \frac{n}{l(l+1)} z + \frac{n(n-1)}{l(l+1)(l+2)} z^2 + \dots}{\frac{1}{l} + \frac{n}{1} \frac{1}{l+1} \frac{z}{1-z} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \frac{1}{l+2} \left(\frac{z}{1-z}\right)^2 + \dots} \end{aligned} \right.$$

Celle-ci a d'assez nombreuses conséquences, sur lesquelles je pourrai revenir dans une autre occasion.