NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. TRACE
E. PITET

Question 636

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 2 (1863), p. 100-104
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__100_1>

QUESTION 636

(voir p. 97);

SOLUTION DE MM. A. TRACE ET E. PITET,
Élèves en mathématiques spéciales au lycée Charlemagne.

Le rayon réfléchi MP, faisant avec la normale MN un angle NMP égal à l'angle NMQ que le rayon incident QM forme avec la normale, et la normale divisant en deux parties égales l'angle du rayon vecteur FM avec une parallèle à l'axe menée par le point M, l'angle FMP est droit.

(*) En désignant par x l'abscisse du point M de la parabole rapportée à son sommet, et par x' l'abscisse du point X où le rayon réfléchi MX touche son enveloppe, on a $x' = 3x$, ce qui donne un moyen bien simple de déterminer le point X, lorsqu'on sait déjà que la droite MX est perpendiculaire à FM. G.

Le problème proposé revient donc à celui-ci :

Trouver l'enveloppe de la droite MP, perpendiculaire au rayon vecteur FM, mené du foyer à un point de la parabole.

Appelons α l'angle MFX (*), ρ_1 le rayon vecteur FM, $2p$ le paramètre de la parabole; nous aurons

$$\rho_1 = \frac{p}{1+\cos\alpha} = \frac{p}{2 \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Si ω et ρ sont les coordonnées polaires d'un point quelconque P du rayon réfléchi MP, le triangle rectangle FMP donnera

$$\rho_1 = \rho \cdot \cos(\omega - \alpha),$$

et, en remplaçant ρ_1 par sa valeur $\dfrac{p}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$, il viendra, pour l'équation de MP :

$$\rho \cdot \cos(\omega - \alpha)\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{p}{2}.$$

Cherchons l'enveloppe de cette droite quand α varie. Pour cela, prenons la dérivée par rapport à α; nous aurons

$$\rho\left[\sin(\omega-\alpha)\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos(\omega-\alpha)\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right] = 0.$$

Supprimons le facteur $\rho\cos\frac{\alpha}{2}$ qui ne donne pas de solution; nous aurons alors :

$$\sin(\omega-\alpha)\cos\frac{\alpha}{2} - \cos(\omega-\alpha)\sin\frac{\alpha}{2} = 0,$$

(*) La droite FX est dirigée en sens contraire de l'axe de la parabole. — On est prié de faire la figure.

ou

$$\sin\left(\omega - \frac{3\alpha}{2}\right) = 0,$$

ce qui donne

$$(1) \qquad \omega - \frac{3\alpha}{2} = 0.$$

Nous ne poserons pas $\omega - \frac{3\alpha}{2} = k\pi$, car si, laissant α fixe, on donne à ω des valeurs différant d'un multiple de π, on obtiendra la même position du point P.

De l'équation (1) on tire

$$\frac{2\omega}{3} = \alpha, \quad \text{et} \quad \omega - \alpha = \frac{\omega}{3};$$

de sorte que l'enveloppe cherchée a pour équation :

$$\rho \cos^3 . \frac{\omega}{3} = \frac{p}{2}, \quad \text{ou} \quad \rho = \frac{p}{2 . \cos^3 \frac{\omega}{3}} \ (*).$$

Cette équation représente une courbe symétrique par rapport à l'axe polaire, et qui rencontre cet axe en des points A, B, tels que

$$\text{FA} = \frac{p}{2}, \quad \text{et} \quad \text{FB} = 4p.$$

On peut construire géométriquement le point de contact P du rayon réfléchi MPH, et de l'enveloppe.

Prenons sur la parabole un point M′, infiniment rapproché de M. Soit M′H′ le rayon réfléchi en M′, et qui est perpendiculaire sur FM′. Les droites MH, M′H′ se couperont en un point P′; le point cherché P est la limite des positions que prend P′ sur MH, quand M′ converge vers M. Pour déterminer ce point limite, cherchons le point au-

(*) *Manuel des Candidats à l'École Polytechnique*, t. Ier, p. 459.

tour duquel il faut faire tourner le système FM'H', infiniment voisin de FMH, pour l'amener à coïncider avec FMP. Ce point, devant être à la même distance de M et de M', appartient à la perpendiculaire KN' élevée au milieu K de MM'. Il est d'ailleurs à égale distance des droites FM, FM', il doit donc se trouver sur la bissectrice de l'angle formé par ces deux droites au point F. Étant, de même, également distant des droites MP'H, M'P'H', il doit appartenir à la bissectrice de l'angle que ces droites forment en P'. Si l'on fait maintenant coïncider M' avec M, à cette limite la perpendiculaire KN' deviendra la normale MN menée à la parabole au point M. Les deux bissectrices deviennent des perpendiculaires aux droites MF, MH, aux points F et P. Donc, pour déterminer le point de contact P du rayon réfléchi MH et de son enveloppe, on mènera à FM, au point F, une perpendiculaire qui coupera la normale MN en un point O, et de ce dernier point on abaissera une perpendiculaire OP sur MH (*).

Cette propriété permet de trouver l'équation de l'enveloppe d'une autre manière.

En effet, au lieu de chercher l'enveloppe, cherchons le lieu du point P, défini par la propriété géométrique que nous venons de démontrer.

En désignant toujours par ρ_1 et α les coordonnées po-

(*) Cette construction géométrique du point de contact P du rayon réfléchi et de la *caustique* a été donnée par de Lhospital dans son *Analyse des infiniment petits*. La démonstration de MM. Trace et Pitet se fonde sur la théorie des *centres instantanés* de rotation, dont les premiers principes sont exposés avec autant de clarté que de précision dans les *Éléments de Calcul infinitésimal* de M. Duhamel (t. I, p. 190 et suiv.). La détermination du point de contact, l'équation de la caustique, l'expression de son rayon de courbure, se déduisent très-simplement de formules générales démontrées dans un excellent ouvrage ayant pour titre : *Sulla geometria analitica delle linee piane, opuscolo di Giuseppe Sacchi, dottore in matematica* (Pavia, 1854). G.

laires FM, MFX de M; et par ρ et ω celles du point P, on aura d'abord

$$\rho_1 = \frac{p}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \rho_1 = \rho\cos(\omega - \alpha);$$

d'où

$$\rho\cos(\omega - \alpha).\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{p}{2}.$$

Menons MC parallèle à l'axe de la parabole, et FD parallèle à la normale OM. Nous aurons

$$\text{CMO} = \text{DFX}, \quad \text{OMF} = \text{MFD}.$$

Mais

$$\text{CMO} = \text{OMF};$$

puisque MO est normale au point M. Donc

$$\text{DFX} = \text{MFD} = \text{MFP}.$$

Il en résulte

$$\text{MFX} = \frac{2}{3}.\text{PFX}, \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{2}{3}\omega.$$

Par suite, l'équation

$$\rho.\cos(\omega - \alpha)\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{p}{2}$$

donne

$$\rho = \frac{p}{2.\cos^3\frac{\omega}{3}},$$

ce qui est l'équation déjà obtenue.

Note du Rédacteur. — M. Hermile de la Phidelne, élève du lycée Charlemagne, nous a adressé une solution à peu près semblable à celle de MM. Trace et Pitet, élèves du même lycée.

La même question a été résolue par MM. Albin Laval, élève du lycée de Lyon; Geoffroy, élève du lycée de Nancy; Abraham Schnée, élève du lycée Charlemagne; Rouquet et Pelletreau.