NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E.-E. KUMMER

E. DEWULF

Théorie générale des systèmes de rayons rectilignes

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 82-102

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__82_1>

THÉORIE GÉNÉRALE DES SYSTÈMES DE RAYONS RECTILIGNES

(voir page 31);

PAR M. E.-E. KUMMER.

CRELLE, t. LVII.

TRADUIT PAR M. E. DEWULF,
Capitaine du Génie.

§ VII. — *Angles de déviation des rayons infiniment voisins.*

Supposons que l'on donne deux droites dans l'espace, que de deux points de la seconde on abaisse des perpendiculaires sur la première. Soient a et b les pieds de ces perpendiculaires. Nommons *angle de déviation des deux droites pour le segment ab* l'angle que ces perpendiculaires forment entre elles. Cet angle devient égal à deux angles droits quand les points a et b s'éloignent à l'infini sur la droite, l'un dans un sens, l'autre en sens contraire. Pour tout segment fini, l'angle de déviation est moindre que deux droits. Si les deux droites sont situées dans un même plan, l'angle de déviation est nul ou égal à 2π quel que soit le segment. Il est nul si le segment contient le point d'intersection des deux rayons, il est égal à 2π dans le cas contraire. Soient a, b, c trois points de la première droite, l'angle de déviation du segment bc est égal à la différence des angles de déviation des segments ac et ab. Ainsi l'angle de déviation d'un segment quelconque donné est déterminé par les angles de déviation de deux segments comptés à partir d'un point donné.

Pour étudier les déviations des rayons d'un système infiniment voisin d'un rayon donné, nous compterons toutes les déviations à partir de l'origine de ce rayon, point dont l'abscisse est nulle.

Soit dq la longueur de la perpendiculaire abaissée d'un point appartenant à un rayon infiniment voisin d'un rayon donné; soit R l'abscisse du pied de cette perpendiculaire; soit α l'angle que forme dq avec une perpendiculaire au premier plan principal. De plus, soient dq_0 et α_0 les valeurs de dq et α pour l'origine du rayon donné. D'après l'équation (4) (§ VI), on a les équations

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} dq\cos\alpha &= -\mathfrak{A}_2\,du - \mathfrak{B}_2\,dv,\\ dq\sin\alpha &= +\mathfrak{A}_1\,du + \mathfrak{B}_1\,dv,\end{aligned}\right.$$

après avoir posé

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{\mathrm{e} + \mathrm{f}'\,t_1 + \mathrm{R}\,(\mathfrak{E} + \mathfrak{F}t_1)}{\mathrm{V}_1},\quad \mathfrak{A}_2 = \frac{\mathrm{e} + \mathrm{f}'\,t_2 + \mathrm{R}\,(\mathfrak{E} + \mathfrak{F}t_2)}{\mathrm{V}_2},$$

$$\mathfrak{B}_1 = \frac{\mathrm{f} + \mathrm{g}t + \mathrm{R}\,(\mathfrak{F} + \mathfrak{G}t_1)}{\mathrm{V}_1},\quad \mathfrak{B}_2 = \frac{\mathrm{f} + \mathrm{g}t_2 + \mathrm{R}\,(\mathfrak{F} + \mathfrak{G}t_2)}{\mathrm{V}_2}.$$

En conséquence, pour $R = 0$, on a

$$(2)\quad \begin{cases} dq_0 \cos\alpha_0 = -\dfrac{e + f' t_2}{V_2} du - \dfrac{f + g t_2}{V_2} dv, \\ dq_0 \sin\alpha_0 = +\dfrac{e + f' t_1^2}{V_1} du - \dfrac{f + g t_1}{V_1} dv \end{cases}$$

et aussi

$$(3)\quad \begin{cases} dq \cos\alpha - dq_0 \cos\alpha_0 = -\dfrac{R(\mathcal{E} + \mathcal{F} t_2)}{V_2} du - \dfrac{R(\mathcal{F} + \mathcal{G} t_2)}{V_2} dv, \\ dq \sin\alpha - dq_0 \sin\alpha_0 = +\dfrac{R(\mathcal{E} + \mathcal{F} t_1)}{V_1} du + \dfrac{R(\mathcal{F} + \mathcal{G} t_1)}{V_1} dv. \end{cases}$$

De ces deux équations, on tire

$$(4)\quad \begin{cases} du = \dfrac{dq \sin\alpha - dq_0 \sin\alpha_0}{RV_1} - \dfrac{dq \cos\alpha - dq_0 \cos\alpha_0}{RV_2}, \\ dv = \dfrac{(dq \sin\alpha - dq_0 \sin\alpha_0)\, t_1}{RV_1} - \dfrac{(dq \cos\alpha - dq_0 \cos\alpha_0)\, t_2}{RV_2}. \end{cases}$$

Si l'on a égard aux équations (2) ainsi qu'aux relations

$$e + (f + f')\, t_1 + g t_1^2 = - r_1 V_1^2,$$

$$e + (f + f')\, t_2 + g t_2^2 = - r_2 V_2^2,$$

$$e + \frac{1}{2}(f + f')(t_1 + t_2) + g t_1 t_2 = 0,$$

$$V_1 V_2 = \Delta(t_2 - t_2),$$

on obtient

$$(5)\quad \begin{cases} R\, dq_0 \cos\alpha_0 = - r_2 (dq \cos\alpha - dq_0 \cos\alpha) \\ \qquad\qquad + \left(\dfrac{f - f'}{2\Delta}\right)(dq \sin\alpha - dq_0 \sin\alpha_0) \\ R\, dq_0 \sin\alpha_0 = -\left(\dfrac{f - f'}{2\Delta}\right)(dq \cos\alpha - dq_0 \cos\alpha_0) \\ \qquad\qquad - r_1 (dq \sin\alpha - dq_0 \sin\alpha_0), \end{cases}$$

et puisque, d'après l'équation (15) (§ IV),

$$\left(\frac{\mathrm{f}-\mathrm{f}'}{2\Delta}\right)^2 = d^2 - \delta^2 = \rho_1\rho_2 - r_1 r_2,$$

on obtient pour $dq\cos\alpha$ et $dq\sin\alpha$ les expressions suivantes

$$(6)\left\{\begin{aligned} dq\cos\alpha &= \left(1-\frac{\mathrm{R}r_1}{\rho_1\rho_2}\right)dq_0\cos\alpha_0 - \frac{\mathrm{R}\sqrt{d^2-\delta^2}}{\rho_1\rho_2}\,dq_0\sin\alpha_0,\\ dq\sin\alpha &= \frac{\mathrm{R}\sqrt{d^2-\delta^2}}{\rho_1\rho_2}\,dq_0\cos\alpha_0 + \left(1-\frac{\mathrm{R}r_2}{\rho_1\rho_2}\right)dq_0\sin\alpha.\end{aligned}\right.$$

Ces deux égalités montrent comment pour chaque point d'un rayon la perpendiculaire dq et l'angle correspondant α se déterminent au moyen du segment compté à partir de l'origine du rayon jusqu'au point considéré. En divisant ces deux égalités membre à membre, on obtient

$$(7)\qquad \tan\!\mathrm{g}\,\alpha = \frac{\mathrm{R}\sqrt{d^2-\delta^2}\cos\alpha_0 + (\rho_1\rho_2 - \mathrm{R}r_2)\sin\alpha_0}{(\rho_1\rho_2 - \mathrm{R}r_1)\cos\alpha_0 - \mathrm{R}\sqrt{d^2-\delta^2}\sin\alpha_0}.$$

L'angle de déviation d'un rayon donné avec un rayon infiniment voisin en un point dont l'abscisse est R, est égal à $\alpha - \alpha_0$, comme nous l'avons dit plus haut. Désignons cet angle par β :

$$\beta = \alpha - \alpha_0 \quad \text{et} \quad \alpha = \beta + \alpha_0.$$

L'équation (7) donne donc

$$(8)\qquad \tan\!\mathrm{g}\,\beta = \frac{\mathrm{R}\left(\sqrt{d^2-\delta^2} - d\sin 2\alpha_0\right)}{\rho_1\rho_2 - \mathrm{R}\left(r_1\cos^2\alpha_0 + r_2\sin^2\alpha_0\right)}.$$

La tangente de l'angle de déviation est donc nulle quand $\mathrm{R} = 0$. Elle est aussi nulle, et par suite $\beta = 0$ ou $\beta = 2\pi$, si

$$(9)\qquad \sqrt{d^2-\delta^2} = d\sin 2\alpha_0,$$

ou bien si

$$\sin 2\alpha_0 = \cos\gamma,$$

ou encore si

$$\alpha_0 = \frac{1}{4}\pi \pm \frac{1}{2}\gamma,$$

c'est-à-dire

$$\alpha_0 = \omega_1 \quad \text{ou} \quad \alpha_0 = \omega_2,$$

ω_1 et ω_2 étant les angles que forment les plans focaux avec le premier plan principal. Ainsi, pour les deux rayons infiniment voisins situés dans les plans focaux, l'angle de déviation est toujours nul ou égal à deux droits. Cela résulte d'ailleurs de ce que chacun de ces rayons se trouve dans un même plan avec le premier rayon.

Dans les systèmes de rayons à surfaces focales imaginaires, qui n'ont pas par suite de plans focaux, l'angle de déviation n'est jamais nul, et par suite la déviation ne peut changer de signe.

Si deux rayons infiniment voisins d'un pareil système sont tels, que la déviation de l'un autour de l'autre se fait toujours de gauche à droite, deux rayons infiniment voisins quelconques sont nécessairement dans le même cas. Les systèmes à surfaces focales imaginaires peuvent donc se diviser en deux classes : les systèmes ou les déviations d'un rayon autour d'un rayon infiniment voisin se font de gauche à droite, et ceux où elles se font de droite à gauche. Du reste, à tout système de rayons à surfaces focales réelles ou imaginaires en correspond un autre, symétrique ou équivalent, en ce sens qu'il ne diffère du premier que par le sens des déviations des rayons les uns autour des autres. Cette différence est exprimée analytiquement par la différence des signes des racines de l'équation quadratique.

Supposons les foyers d'un rayon réels, examinons les angles de déviation que l'on obtient en passant de l'origine aux foyers. Soient β_1 et β_2 ces angles. Pour β_1, nous aurons $R = \rho_1$, et pour β_2, $R = \rho_2$. Au moyen des équations (14) (§ IV), d'où il résulte que

$$r_1 \cos^2 \alpha_0 + r_2 \sin^2 \alpha_0 = m - d \cos 2\alpha_0,$$

on trouve

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{tang} \beta_1 &= \frac{\sqrt{d^2 - \delta^2} - d \sin 2\alpha_0}{\delta + d \cos 2\alpha_0}, \\ \operatorname{tang} \beta_2 &= \frac{\sqrt{d^2 - \delta^2} - d \sin 2\alpha_0}{-\delta + d \cos 2\alpha_0}. \end{aligned} \right.$$

A l'aide des équations (18) (§ IV) qui donnent les angles ω_1 et ω_2 des plans focaux avec un plan principal, nous trouverons

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{tang} \beta_1 &= \frac{\sin 2\omega_1 - \sin 2\alpha_0}{\cos 2\omega_1 - \cos 2\alpha_0} = \operatorname{tang} (\omega_1 - \alpha_0), \\ \operatorname{tang} \beta_2 &= \frac{\sin 2\omega_2 - \sin 2\alpha_0}{\cos 2\omega_2 - \cos 2\alpha_2} = \operatorname{tang} (\omega_2 - \alpha_0). \end{aligned} \right.$$

Donc

$$(12) \qquad \beta_1 = \omega_1 - \alpha_0, \quad \beta_2 = \omega_2 - \alpha_0.$$

Donc *les angles de déviation des segments compris entre les foyers d'un rayon ont la même valeur quel que soit le rayon infiniment voisin du premier que l'on considère. La valeur de ces angles n'est autre que celle de l'inclinaison des plans focaux du rayon considéré.*

Si l'on se donne la valeur de l'angle de déviation β, on peut déterminer l'abscisse R pour laquelle l'angle de déviation d'un rayon donné et d'un rayon infiniment voisin a cette valeur. L'équation (8) donne cette valeur de R

$$(14)\quad R = \frac{\rho_1 \rho_2 \sin\beta}{(r_1 \cos^2\alpha_0 + r_2 \sin^2\alpha_0)\sin\beta + \sqrt{d^2-\delta^2}\cos\beta - d\sin 2\alpha_0 \cos\beta}.$$

En mettant pour r_1 et r_2 leurs valeurs $m - d$ et $m + d$, nous obtenons l'expression plus simple

$$(15)\quad R = \frac{\rho_1 \rho_2 \sin\beta}{m\sin\beta + \sqrt{d^2-\delta^2}\cos\beta - d\sin(2\alpha_0+\beta)}.$$

Supposons que R soit fonction de α seulement, β étant une constante donnée, R sera maximum quand on aura

$$\sin(2\alpha_0+\beta) = +1 \quad \text{ou} \quad \alpha_0 = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\beta;$$

R sera minimum quand on aura

$$\sin(2\alpha_0+\beta) = -1, \quad \alpha_0 = \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}\beta.$$

Désignons le maximum de R par R_1 et son minimum par R_2, nous aurons

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} R_1 &= \frac{\rho_1 \rho_2 \sin\beta}{m\sin\beta + \sqrt{d^2-\delta^2}\cos\beta - d}, \\ R_2 &= \frac{\rho_1 \rho_2 \sin\beta}{m\sin\beta + \sqrt{d^2-\delta^2}\cos\beta + d}. \end{aligned}\right.$$

Nous tirons de là

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{R} - \frac{1}{R_1} &= \frac{[1-\sin(2\alpha_0+\beta)]\,d}{\rho_1\rho_2\sin\beta} \\ &= \frac{2\sin^2\left(\alpha_0 + \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{4}\pi\right)d}{\rho_1\rho_2\sin\beta}, \\ \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R} &= \frac{[1+\sin(2\alpha_0+\beta)]\,d}{\rho_1\rho_2\sin\beta} \\ &= \frac{2\cos^2\left(\alpha_0 + \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{4}\pi\right)d}{\rho_1\rho_2\sin\beta}, \end{aligned}\right.$$

puis

$$(18)\ \frac{1}{R} = \frac{\cos^2\left(\alpha_0 + \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{4}\right)\pi}{R_1} = \frac{\sin^2\left(\alpha_0 + \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{4}\pi\right)}{R_2}.$$

Supposons que l'on veuille prendre sur tous les rayons infiniment voisins d'un rayon donné des segments tels, que l'angle de déviation correspondant soit constant. La formule (18) nous donne ces segments pour un rayon quelconque infiniment voisin en fonction du plus grand et du plus petit d'entre ces segments et à l'angle que fait la direction de l'origine de ce rayon avec la direction de l'origine du rayon sur lequel se trouve le plus grand segment. Cette formule est tout à fait analogue à la formule d'Euler qui donne le rayon de courbure d'une section normale en fonction des rayons de courbure principaux et de l'angle que fait la section normale avec une des sections principales. La formule d'Euler n'est, du reste, qu'un cas particulier de la formule (18) comme nous le verrons plus loin.

Dans le cas où l'angle constant de déviation est égal à un droit, on a

$$(19)\qquad \frac{1}{R} = \frac{\cos^2\alpha_0}{R_1} + \frac{\sin^2\alpha_0}{R_2}.$$

La propriéte exprimée par cette formule a été trouvée pour la première fois par Hamilton dans le supplément dont il a été question, mais par des considérations différentes de celles que nous avons employées. Hamilton n'a point considéré les angles de déviation si utiles dans l'étude des systèmes de rayons.

§ VIII. — *Des pinceaux infiniment petits et des rayons principaux.*

Dans les deux équations (6) (§ VII)

$$
(1)\quad \begin{cases} dq\cos\alpha = \left(1 - \dfrac{\mathrm{R}r_1}{\rho_1\rho_2}\right) dq_0\cos\alpha_0 - \dfrac{\mathrm{R}\sqrt{d^2-\delta^2}}{\rho_1\rho_2}\, dq_0\sin\alpha_0, \\ dq\sin\alpha = \dfrac{\mathrm{R}\sqrt{d^2-\delta^2}}{\rho_1\rho_2}\, dq_0\cos\alpha_0 + \left(1 - \dfrac{\mathrm{R}r_1}{\rho_1\rho_2}\right) dq_0\sin\alpha_0, \end{cases}
$$

on peut considérer dq et α comme les coordonnées polaires de la circonférence de la section d'un pinceau infiniment mince. L'abscisse de la section est R, dq_0 et α_0 sont les coordonnées polaires de la courbe qui donne la section passant par l'origine du rayon. Ces équations peuvent servir, non pas à comparer les aires des sections d'un pinceau (ce qui a déjà été fait), mais à faire voir comment la forme d'une section quelconque dépend de celle de l'une d'entre elles. Si des coordonnées polaires de deux sections on passe aux coordonnées rectangulaires, en choisissant des axes dans les plans principaux du rayon auxquels tous les autres rayons du faisceau sont infiniment voisins, on a

$$
(2)\quad \begin{cases} dq\cos\alpha = x, \qquad dq\sin\alpha = y, \\ dq_0\cos\alpha_0 = x_0, \quad dq_0\sin\alpha_0 = y_0, \end{cases}
$$

x et y sont les coordonnées infiniment petites des points de la circonférence de la section.

Les équations (1) donnent

$$
(3)\quad \begin{cases} x = \left(1 - \dfrac{\mathrm{R}r_1}{\rho_1\rho_2}\right) x_0 - \dfrac{\mathrm{R}\sqrt{d^2-\delta^2}}{\rho_1\rho_2}\, y_0, \\ y = \dfrac{\mathrm{R}\sqrt{d^2-\delta^2}}{\rho_1\rho_2}\, x_0 + \left(1 - \dfrac{\mathrm{R}r_2}{\rho_1\rho_2}\right) y_0 \end{cases}
$$

ou

$$(4)\quad \begin{cases} (\rho_1 - R)(\rho_2 - R)x_0 = (\rho_1\rho_2 - Rr_2)x + R\sqrt{d^2-\delta^2}\,y, \\ (\rho_1 - R)(\rho_2 - R)y_0 = -R\sqrt{d^2-\delta^2}\,x + (\rho_1\rho_2 - Rr_1)y. \end{cases}$$

Ainsi les circonférences des sections d'un pinceau infiniment petit sont des courbes du même degré, et elles sont dans le rapport de collinéation exprimé par les équations précédentes.

Les sections d'un pinceau passant par les foyers méritent un examen particulier. Pour ces sections, la mesure de la densité est infiniment grande, leur aire est donc un infiniment petit d'un ordre supérieur. Si l'on pose

$$R = \rho_1 \quad \text{ou} \quad R = \rho_2,$$

les équations (4) sont identiques ainsi que les équations (3) et elles donnent

$$(5)\quad \begin{cases} y = \sqrt{\dfrac{d-\delta}{d+\delta}}\,x \quad \text{pour} \quad R = \rho_1, \\ y = \sqrt{\dfrac{d+\delta}{d-\delta}}\,x \quad \text{pour} \quad R = \rho_2. \end{cases}$$

Ce sont les équations de deux lignes droites infiniment petites, puisque les coordonnées x et y ont des valeurs infiniment petites.

Donc *les sections d'un pinceau infiniment petit qui passent par les deux foyers sont deux droites infiniment petites*.

Cela veut dire que l'une des dimensions, qui dans les sections ordinaires sont des infiniment petits du premier ordre, devient un infiniment petit d'un ordre supérieur. Il résulte aussi de ceci que *la surface qui limite un pinceau infiniment petit à foyers réels peut être engendrée par une droite qui s'appuierait constamment sur une* *courbe infiniment petite et sur deux droites perpendiculaires à un rayon passant dans l'intérieur de la petite courbe et perpendiculaire au plan de cette courbe.*

Pour déterminer les directions et les longueurs des sections passant par les foyers, il est bon de repasser aux coordonnées polaires dq, α, dq_0, et a_0. Dans les équations (1) posons

$$R = r_1,$$

et remarquons que

$$\rho_2 - r_1 = d + \delta, \quad \rho_2 - r_2 = -d + \delta,$$

nous obtenons pour la section qui passe par le premier foyer

$$(6) \quad \begin{cases} \rho_2\, dq \cos\alpha = (d + \delta)\, dq_0 \cos\alpha_0 - \sqrt{d^2 - \delta^2}\, dq_0 \sin\alpha_0, \\ \rho_2\, dq \sin\alpha = \sqrt{d^2 + \delta^2}\, dq_0 \cos\alpha_0 - (d - \delta)\, da_0 \sin\alpha_0. \end{cases}$$

Introduisons dans ces formules l'angle ω_1 du premier plan focal avec le premier plan principal, nous aurons, équation (18) (§ IV),

$$\sin\omega_1 = \sqrt{\frac{d - \delta}{2d}}, \quad \cos\omega_1 = \sqrt{\frac{d + \delta}{2d}};$$

donc

$$(7) \quad \begin{cases} \rho_2\, dq \cos\alpha = 2d \cos\omega_1 \cos(\alpha_0 + \omega_1)\, dq_0, \\ \rho_2\, dq \sin\alpha = 2d \cos\omega_1 \cos(\alpha_0 + \omega_1)\, dq_0, \end{cases}$$

d'où

$$(8) \qquad \operatorname{tang}\alpha = \operatorname{tang}\omega_1 \quad \text{ou} \quad \alpha = \omega_1.$$

α est constant; donc la section dont les coordonnées sont dq et α est une portion de ligne droite passant par le pôle. L'équation $\alpha = \omega_1$ donne aussi la direction de cette droite.

Pour $R = \rho_2$, ou pour la section passant par le second foyer, on obtient d'une manière analogue

$$(9)\qquad \begin{cases} \rho_1\, dq \cos\alpha = 2d \cos\omega_2 \cos(\alpha_0 + \omega_2)\, dq_0, \\ \rho_1\, dq \sin\alpha = 2d \sin\omega_2 \cos(\alpha_0 + \omega_2)\, dq_0, \end{cases}$$

$$(10)\qquad \operatorname{tang}\alpha = \operatorname{tang}\omega_2 \quad \text{ou} \quad \alpha = \omega_2.$$

On a donc le théorème suivant :

Les deux droites infiniment petites qui forment les sections focales d'un pinceau infiniment petit sont situées dans ses plans focaux.

Pour la section passant par le premier foyer, c'est-à-dire pour $\alpha = \omega_1$, on a, d'après l'équation (7),

$$(11)\qquad dq = \frac{2d}{\rho_2}\, dq_0 \cos(\alpha_0 + \omega_1).$$

Si, comme nous l'avons supposé, la circonférence de la section du pinceau qui passe par son origine est déterminée et donnée, dq_0 est déterminé et fonction de α_0, et par l'équation (11) dq est déterminé et fonction de α_0. Comme d'ailleurs la courbe dont dq est le rayon vecteur est une droite passant par le pôle, la longueur de dq est égale à la différence des deux valeurs extrêmes que peut prendre dq considéré comme fonction de α_0, ou plutôt, l'une de ces valeurs étant négative et l'autre positive, la longueur de dq est égale à la somme des valeurs absolues de son maximum et de son minimum. On obtient de la même manière la longueur de la section qui passe par le second foyer au moyen de l'équation

$$(12)\qquad dq = \frac{2d}{\rho_1}\, dq_0 \cos(\alpha_0 + \omega_2).$$

Dans le cas le plus simple où la section du pinceau serait un cercle infiniment petit, dq_0 est constant, et les valeurs extrêmes de dq pour la section qui passe par le premier foyer s'obtiennent en posant

$$\alpha_0 + \omega_1 = 0, \quad \alpha_0 + \omega_1 = \pi$$

et sont égales à

$$\frac{2d}{\rho_1} dq \quad \text{et} \quad -\frac{2d}{\rho_2} dq_0.$$

La somme de leurs valeurs absolues est donc $\frac{4d}{\rho_2} dq_0$. La longueur de la section passant par le second foyer est $\frac{4d}{\rho_1} dq_0$. Ces deux longueurs sont proportionnelles à la distance des deux sections à la section circulaire qui passe par l'origine. Si l'on cherche dans quel cas la longueur de la section qui passe par l'un des foyers est nulle, on trouve, d'après les équations (11) et (12), que ce cas se présente quand $d = 0$ et seulement quand $d = 0$. La condition $d = 0$ entraîne $\delta = 0$, puisque δ n'est jamais plus grand que d; il faut donc que l'on ait

$$r_2 = r_1, \quad \text{et} \quad \rho_2 = \rho_1,$$

c'est-à-dire que pour ce pinceau, il faut que les points limites et les foyers viennent se confondre avec le centre. Nommons, d'après Hamilton, *rayons principaux* les rayons tels, que tous leurs rayons infiniment voisins passent par un de leurs points. Ces rayons principaux ne peuvent exister que quand les deux surfaces des points limites et avec elles les deux surfaces focales ont des points communs. Dans ce cas, il existe toujours des rayons principaux, que les points communs soient des points de contact, des points d'intersection ou des points situés sur des courbes d'intersection.

Les plans principaux des rayons principaux sont indéterminés.

Dans le système tout particulier où tous les rayons passent par un même point, tous les rayons sont des rayons principaux. Il est aisé de voir que ce système est le seul pour lequel ce cas se présente. Il existe une infinité de systèmes qui ont des séries continues de rayons principaux ; ces séries forment des surfaces. Tel est, par exemple, le système des tangentes communes à deux surfaces du second degré confocales ; toutes les tangentes à la courbe d'intersection des deux surfaces sont des rayons principaux. Il existe une infinité de systèmes qui possèdent des rayons principaux isolés.

Les rayons principaux ne se présentent pas en général dans le système le plus général, parce que les valeurs de u et de v qui correspondent à un rayon principal sont liées par trois équations.

Puisque les plans principaux d'un rayon principal sont indéterminés, l'équation quadratique (4) (§ II) doit s'évanouir ; il faut donc que l'on ait

$$
(13) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \mathrm{g}\mathcal{F} - \frac{1}{2}(\mathrm{f} + \mathrm{f}')\,\mathcal{G} = 0, \\ & \mathrm{e}\mathcal{G} - \mathrm{g}\mathcal{E} = 0, \\ & \frac{1}{2}(\mathrm{f} + \mathrm{f}')\,\mathcal{E} - \mathrm{e}\mathcal{F} = 0. \end{aligned} \right.
$$

Ces trois équations se réduisent en général à deux. Excepté le cas où $\mathcal{F} = 0$, l'une d'elles est une conséquence des deux autres. Mais il y a une troisième équation résultant de ce que le rayon doit avoir un foyer réel ; il faut que $\delta = 0$, ce qui donne

$$
(14) \qquad \mathrm{f} + \mathrm{f}'.
$$

Supposons maintenant que pour un rayon les deux foyers coïncident avec le centre, les points limites ne coïncidant pas avec le centre. Le pinceau infiniment petit correspondant n'a qu'une section rectiligne; elle passe par le centre, renferme en même temps les deux foyers et se trouve dans le plan avec lequel coïncident, dans ce cas, les deux plans focaux. D'après l'équation

$$\sin\gamma = \frac{\delta}{d},$$

γ est nul en même temps que δ ou l'angle des sections rectilignes est nul en même temps que la distance des foyers. La condition pour que les deux foyers coïncident ne donne qu'une équation entre u et v. Il en résulte que les systèmes de rayons ont des suites continues de rayons jouissant de cette propriété et formant des surfaces réglées, que par suite les surfaces focales se coupent, en général, suivant des courbes déterminées, puisque toutes les tangentes à ces courbes sont des rayons jouissant de cette propriété que leurs deux foyers coïncident avec le centre. Il existe ainsi toute une famille de systèmes de rayons pour lesquels tous les rayons jouissent de cette propriété, parce que leurs surfaces focales coïncident et ne forment qu'une seule surface.

§ IX. — *Comparaison de la théorie générale des systèmes de rayons avec la théorie particulière de la courbure des surfaces et des systèmes de normales aux surfaces.*

Les systèmes de rayons dont nous venons d'exposer la théorie générale, renferment, comme cas particulier, les systèmes dont tous les rayons sont normaux à une même surface. Pour ce système, les expressions que nous avons désignées par f et f' et qui sont formées par la combinaison des quotients différentiels partiels de x, y, z, ξ, η, ζ, sont égales l'une à l'autre. Si l'on donne une surface à laquelle tout rayon du système doit être normal, si l'on désigne par x', y', z', les coordonnées du point de cette surface où le rayon $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$, doit être normal et par r la distance du point x', y', z' à l'origine x, y, z, du rayon, on aura

$$(1) \qquad x' = x + r\xi, \quad y' = y + r\eta, \quad z' = z + r\zeta,$$

et puisque le rayon est normal à la surface on a aussi

$$(2) \qquad \xi dx' + \eta dy' + \zeta dz' = 0.$$

Remplaçons x', y', z' par leurs valeurs dans cette relation, nous trouverons

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \xi dx + \eta dy + \zeta dz + dr(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \\ \qquad + r(\xi d\xi + \eta d\eta + \zeta d\zeta) = 0, \end{array} \right.$$

et par suite

$$(4) \qquad \xi dx + \eta dy + \zeta dz = - dr$$

ou

$$(5) \quad (\xi a + \eta b + \zeta c) du + (\xi a' + \eta b' + \zeta c') dv = - dr.$$

Le premier membre de cette équation doit donc être une différentielle complète d'une fonction $-r$ de deux variables indépendantes u et v. Il faut donc que

$$(6) \qquad \frac{d(\xi a + \eta b + \zeta c)}{dv} = \frac{d(\xi a' + \eta b' + \zeta c')}{du}$$

et puisque l'on a

$$\frac{da}{dv} = \frac{da'}{du}, \quad \frac{db}{dv} = \frac{db'}{du}, \quad \frac{dc}{dv} = \frac{dc'}{du},$$

on a aussi

$$a\mathrm{a}' + b\mathrm{b}' + c\mathrm{c}' = a'\mathrm{a} + b'\mathrm{b} + c'\mathrm{c}$$

ou

$$f = f'.$$

Cette équation doit être identique pour que le système de rayons soit un système de normales à une surface. Si cette condition est satisfaite, il en résulte que l'on peut déterminer r en fonction de u et de v au moyen de l'équation (4). Pour une telle valeur de r, les équations (1) représentent une surface à laquelle les rayons du système sont normaux. Comme dans l'intégrale de l'équation (4) il entre une constante arbitraire, on a non-seulement une surface qui satisfait à la question, mais on a une série de surfaces connues sous le nom de surfaces *parallèles*.

Pour $f = f'$ l'équation quadratique (5) (§ IV), dont les racines sont τ_1 et τ_2, est la même que l'équation quadratique (4) (§ II) dont les racines sont t_1 et t_2. L'équation (9) (§ II), dont les racines sont ρ_1 et ρ_2, devient aussi la même que l'équation (16) (§ II), dont les racines sont r_1 et r_2. Il résulte de là que

Dans les systèmes dont tous les rayons sont normaux à une surface, les deux plans focaux de chaque rayon coïncident avec ses deux plans principaux, et ses deux foyers coïncident avec ses points limites des plus courtes distances.

Considérons une des surfaces auxquelles tous les rayons du système sont normaux comme la surface d'où ces rayons sont issus. Les abscisses ρ_1 et ρ_2 des foyers, ou, ce qui revient au même, les abscisses r_1 et r_2 des points limites, deviennent les rayons de courbure principaux de la surface. Les surfaces focales qui coïncident avec celles des plus courtes distances ne sont autres que les surfaces étudiées par Monge, sur lesquelles se trouvent tous les centres de courbure de la surface. La théorie de la courbure des surfaces peut donc être considérée comme un cas particulier de la théorie générale des systèmes de rayons. Il n'est pas sans intérêt d'examiner quelle est la relation qui existe entre les théorèmes généraux que nous avons démontrés et les théorèmes connus de la courbure des surfaces.

En examinant si la théorie générale des systèmes de rayons ne nous donne pas quelques théorèmes nouveaux pour la théorie de la courbure des surfaces et celle des normales, nous n'avons rien trouvé de bien remarquable, comme on pouvait s'y attendre. On pourrait citer cependant le théorème auquel donne lieu l'équation

$$r = r_1 \cos^2 \omega + r_2 \sin^2 \omega.$$

Il exprime une propriété générale des normales à une surface et pourrait, par conséquent, entrer dans la théorie particulière de ces normales. La propriété exposée (§ VIII) sur les pinceaux infiniment petits donne aussi un théorème sur les normales aux surfaces qui n'est pas encore connu, je crois. On peut l'énoncer ainsi :

En un point d'une surface, les deux plans normaux principaux sont coupés par toutes les normales aux points infiniment voisins de la surface du point donné, de telle manière que les distances des points d'intersection au point donné sont, pour l'un des plans normaux, égales au plus grand rayon de courbure et pour l'autre au plus petit rayon de courbure.

Si l'on parcourt tous les théorèmes donnés dans la théorie de la courbure des surfaces et dans celle des normales, on trouve toujours des théorèmes correspondants dans la théorie générale des systèmes de rayons.

Considérons les deux sections normales principales en un point donné d'une surface, elles donnent le plus grand et le plus petit rayon de courbure. Dans la théorie générale, nous avons d'un côté les plans principaux et de

7.

l'autre les plans focaux. Les propriétés des normales aux surfaces se divisent dans la théorie générale : une partie des propriétés correspondantes se rapporte aux plans principaux et une autre aux plans focaux. Les plans principaux jouissent de ces propriétés : Ils sont toujours réels et perpendiculaires entre eux ; les plans focaux renferment les deux rayons infiniment voisins du rayon donné qui le coupent. Aux centres de courbure principaux des surfaces correspondent les points limites des plus courtes distances et les foyers, et par suite aux surfaces qui renferment ces centres de courbure correspondent les surfaces des points limites et les surfaces focales. Les surfaces des points limites jouissent de cette propriété qu'elles limitent dans l'espace une région où se trouvent toutes les plus courtes distances de deux rayons infiniment voisins, et les surfaces focales jouissent de cette autre propriété que tous les rayons du système leur sont tangents. Les deux belles propriétés des surfaces des centres de courbure trouvées par Monge, savoir : 1° que leurs contours apparents se coupent à angle droit quel que soit le point de l'espace où l'on place le point de vue, 2° que les arêtes de rebroussement des surfaces développables formées par les normales sont des lignes géodésiques sur les surfaces des centres de courbure, sont des propriétés spéciales aux systèmes de normales à une surface. Elles n'appartiennent ni aux surfaces des points limites, ni aux surfaces focales des systèmes généraux.

Les deux systèmes de lignes de courbure des surfaces considérées comme les lieux géométriques des points des surfaces dont les normales forment des surfaces développables, correspondent dans le système le plus général aux deux séries de surfaces développables Ω_1 et Ω_2 (§ V). D'un autre côté, on peut regarder les surfaces réglées O_1 et O_2 comme correspondant aussi aux lignes de courbure, car elles aussi coupent la surface suivant des lignes de courbure dans le cas où tous les rayons du système sont normaux à cette surface.

Les ombilics des surfaces, pour lesquels les deux rayons de courbure principaux sont égaux, de sorte que toutes les normales infiniment voisines passent par le même point et que la direction des plans normaux principaux devient indéterminée, correspondent aux rayons principaux qui sont tels, que tous leurs rayons infiniment voisins les coupent en un même point et dont les plans principaux aussi bien que les plans focaux ont une direction indéterminée.

Le théorème d'Euler qui montre comment le rayon de courbure d'une section normale est déterminé par l'angle de cette section avec l'une des sections principales et les deux rayons de courbure principaux, se trouve comme cas particulier dans la formule (18) (§ VII). Cette formule devient la formule d'Euler si on y fait

$$\beta = \frac{\varpi}{2}, \quad r_1 = \rho_1, \quad r_2 = \rho_2$$

La méthode générale exposée (§ VII) détermine aussi le rayon de courbure d'une manière nouvelle qui n'est pas dénuée d'intérêt. Elle montre que l'angle de déviation du rayon de courbure d'une section normale en point donné avec une normale issue d'un point de la surface situé dans le plan de la section et infiniment voisin du point donné est toujours égal à un droit, c'est-à-dire que :

Si par deux points infiniment voisins d'une surface on mène les deux normales et que sur ces normales on prenne les deux longueurs pour lesquelles l'angle de déviation est égal à un droit, ces longueurs représentent les rayons de courbure aux deux points infiniment voisins pour la section normale qui passe par ces points.

La mesure de la courbure donnée par Gauss se retrouve dans la théorie générale dans la mesure de la densité. Son expression, qui est la réciproque du produit des deux rayons de courbure principaux, se trouve dans l'expression (§ VI) de la mesure de la densité qui est la réciproque du produit de la distance des deux foyers au point considéré. Pour les systèmes de rayons normaux à une surface et par suite normaux à toutes les surfaces parallèles, la mesure de la densité est identique avec celle de la courbure, parce qu'en chaque point de l'espace la mesure de la densité des rayons est égale à la mesure de la courbure de la surface parallèle qui passe en ce point.

On voit que les considérations introduites par Gauss dans la science possèdent ce degré de généralité qui leur permet de s'étendre bien au delà du but qu'on leur avait d'abord fixé. (*Fin.*)