NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

VINCENZO JANNI

Démonstration de quelques théorèmes de M. Steiner

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 78-79

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__78_1>

DÉMONSTRATION DE QUELQUES THÉORÈMES DE M. STEINER;

PAR M. VINCENZO JANNI.

Si deux coniques touchent les côtés d'un quadrilatère, les huit points de contact se trouvent sur une autre conique.

L'équation d'une conique qui touche les côtés d'un quadrilatère est de la forme

$$m^2 E^2 - 2m(AC + BD) + F^2 = 0$$

(SALMON, *Sections coniques*, § 288.)

dans laquelle A, C sont les équations de deux côtés opposés du quadrilatère, B, D celles des autres, E, F les diagonales. Toutes ces quantités sont liées par la relation

$$AC - BD = EF.$$

On obtient les points de contact en mettant successivement $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$, de manière qu'ils sont déterminés par les équations

$$(A = 0,\ mE + F = 0),\quad (C = 0,\ mE + F = 0),$$
$$(B = 0,\ mE - F - 0),\quad (D = 0,\ mE - F = 0),$$

où l'on voit que les droites qui joignent les points de contact passent par l'intersection des diagonales et forment de plus un faisceau harmonique. Une conique qui passe par ces points de contact est donc de la forme

$$m^2 E^2 - 2m(AC + BD) + F^2 + k(m^2 E^2 - F^2) = 0.$$

De même une conique qui passe par les points de contact d'une autre conique qui touche les côtés du même quadrilatère aura pour équation

$$m'^2 E^2 - 2m'(AC + BD) + F^2 + k'(m'^2 E^2 - F^2) = 0.$$

Or ces deux équations peuvent devenir identiques faisant

$$k = \frac{m' - m}{m' + m} \quad \text{et} \quad k = -k',$$

et l'équation de la conique qui passe par les huit points sera

$$mm' E^2 - (m + m')(AC + BD) + F^2 = 0.$$