NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GIARD

Courbe dont la tangente polaire est constante

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 70-77

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__70_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1862, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

COURBE DONT LA TANGENTE POLAIRE EST CONSTANTE;

PAR M. GIARD,
Sous-lieutenant du genie, Licencié ès Sciences mathématiques.

Équation de la courbe.

Soit k la valeur constante de la tangente; l'équation différentielle de la courbe est

$$\rho = k \cos V \quad (*)$$

ou

$$\frac{\rho}{k} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\rho^2}{\left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^2}}}.$$

On tire de là

$$\frac{\frac{d\rho}{d\omega}}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{\frac{k^2}{\rho^2} - 1}}.$$

Enfin

$$d\omega = \frac{d\rho}{\rho}\sqrt{\frac{k^2}{\rho^2} - 1}.$$

Prenons le signe $+$ pour le radical, alors ρ croît quand ω croît; nous aurons

$$d\omega = \frac{k.d\rho}{\rho^2}\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{k^2}} = \frac{\frac{d\rho}{k}}{\left(\frac{\rho}{k}\right)^2}\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{k^2}}$$

(*) V angle du rayon vecteur et de la tangente prise dans le système polaire. TM.

et

$$\omega + C = \int \frac{\frac{d\rho}{k}}{\left(\frac{\rho}{k}\right)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{k}\right)^2}} - \int \frac{\frac{d\rho}{k}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{k}\right)^2}}.$$

Or

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1 - x^2}}$$

s'obtient en posant

$$x = \frac{1}{z}$$

et devient

$$-\int \frac{z dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = \sqrt{z^2 - 1};$$

nous aurons donc

$$\omega + C = \operatorname{arc\,cos} \frac{l}{k} - \sqrt{\left(\frac{k}{\rho}\right)^2 - 1}.$$

En se reportant à l'équation différentielle

$$\frac{\rho}{k} = \cos V,$$

on voit que l'équation finie de la courbe résulte de l'élimination de V entre les deux équations

$$\frac{\rho}{k} = \cos V,$$
$$-(\omega + C) = \operatorname{tang} V - V.$$

La constante C nous montre qu'une courbe située par rapport à une droite quelconque passant par le pôle comme

$$(\alpha) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\rho}{k} &= \cos V, \\ -\omega &= \operatorname{tang} V - V \end{aligned} \right.$$

l'est par rapport à l'axe polaire, répond à la question. Ce qui était évident d'après la propriété exprimée par l'équation différentielle.

Si nous avions pris le signe — pour le radical, nous serions arrivés à

$$\frac{\rho}{k} = -\cos V = \cos(\pi - V),$$

$$-\omega = \operatorname{tang}(\pi - V) - (\pi - V)$$

ou

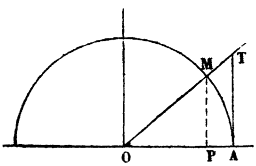
$$\omega = \operatorname{tang} V + \pi - V,$$

courbe identique à (α) située symétriquement par rapport à l'axe polaire.

Il nous suffira donc de discuter

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\rho}{k} = \cos V, \\ -\omega = \operatorname{tang} V - V. \end{array}\right.$$

Si l'on change ρ en $-\rho$, ω ne change pas. Donc la courbe a le pôle pour centre.



Pour construire la courbe, décrivons une circonférence de rayon k. Si $MOA = V$,

$$\rho = OP,$$

et

$$\omega = \frac{\mathrm{TA} - \mathrm{MA}}{k};$$

on voit que la courbe est asymptote au pôle.

Le rayon vecteur diminuant toujours à mesure que la valeur absolue de ω augmente et la courbe faisant avec le rayon vecteur un angle qui part de o, croît constamment et devient droit au pôle.

Du reste, pour avoir cet angle en un point quelconque, il suffit de résoudre l'équation transcendante

$$(-\omega') = \operatorname{tang} V - V.$$

Point d'inflexion.

D'après la forme de la courbe, il doit y avoir un point d'inflexion entre $\omega = 0$ et $\omega = \frac{\pi}{2}$. Cherchons à l'obtenir. Au point d'inflexion

$$\frac{d(V + \omega)}{d\omega} = 0.$$

Or

$$\frac{d(V + \omega)}{d\omega} = \frac{d(V + \omega)}{dV} \cdot \frac{dV}{d\omega}.$$

comme

$$\omega = V - \operatorname{tang} V = (2 - \operatorname{séc}^2 V)\frac{dV}{d\omega}.$$

En différentiant l'équation

$$\omega = V - \operatorname{tang} V$$

par rapport à ω, on a

$$1 = \frac{dV}{d\omega}(1 - \operatorname{séc}^2 V),$$

d'où

$$\frac{dV}{d\omega} = - \cot^2 V.$$

On a donc

$$(\text{séc}^2 V - 2) \cot^2 V = 0,$$

qui donne

$$\frac{1}{\cos^2 V} = 2, \qquad V = 45^\circ,$$

$$\cot V = 0, \qquad V = 90^\circ.$$

Interprétons ces résultats.

$V = 45^\circ$ nous donne un point d'inflexion pour $(-\omega) = 1 - \frac{\pi}{4} = 0{,}212101$:

$$\omega = -(12 \text{ à } 13^\circ).$$

Quant à $V = 90^\circ$, cela nous donne un point d'inflexion au pôle; et il y en aurait un en effet si la courbure n'y était point infinie, car toute courbe qui a le pôle pour centre et qui y passe a en ce point un point d'inflexion.

Aire.

Aire décrite par le rayon vecteur :

$$d\lambda = - \frac{1}{2} k^2 \cos^2 V . d\omega.$$

Or

$$d\omega = - \text{tang}^2 V dV;$$

donc

$$d\lambda = \frac{1}{2} k^2 \sin^2 V . dV,$$

d'où

$$\lambda = C + \frac{1}{4} k^2 (V - \sin V \cos V).$$

$C = 0$ si l'on prend l'aire à partir de $V = 0$.
Ainsi l'expression générale de l'aire est

$$\lambda = \frac{1}{4} k^2 (V - \sin V \cos V).$$

Pour $V = \frac{\pi}{2}$, on a

$$\lambda = \frac{1}{8} \pi k^2.$$

Doublant, on aura pour l'aire totale

$$\frac{1}{4} \pi k^2 = \pi \left(\frac{k}{2}\right)^2,$$

c'est l'aire du cercle dont le rayon est $\frac{k}{2}$. Même résultat que pour la tractrice.

Rectification de la courbe.

$$dS = - d\omega \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^2},$$

$$d\omega = - \operatorname{tang}^2 V . dV,$$

$$\rho = k \cos V,$$

$$\frac{d\rho}{d\omega} = \frac{d\rho}{dV} \cdot \frac{dV}{d\omega} = - k \sin V (- \cot^2 V) = k \frac{\cos^2 V}{\sin V}.$$

Donc

$$dS = + \operatorname{tang}^2 V . dV \sqrt{k^2 \cos^2 V (1 + \cot^2 V)}$$

$$= k \frac{\sin^2 V}{\cos V} dv \cdot \frac{1}{\sin V} = k \operatorname{tang} V . dV.$$

Donc

$$S = C + k l \operatorname{séc} V.$$

$C = o$ si l'on compte à partir du point où $V = o$, et l'on a pour expression générale de l'arc de courbe

$$S = kl \operatorname{séc} V = kl \frac{k}{\rho}.$$

Équation finie de la courbe.

L'équation finie de la courbe en prenant S pour variable indépendante est donc

$$e^{\frac{S}{k}} = \frac{k}{\rho},$$

d'où

$$\rho = ke^{-\frac{S}{k}}.$$

Si l'on se reporte à l'équation finie de la *tractrice* en S et en y, on verra qu'elle est

$$y = ke^{-\frac{S}{k}}.$$

On pourrait donner à la spirale que nous venons d'étudier le nom de *tractrice polaire.*

Pour la construction de la courbe, les points à tangente horizontale seront donnés par l'équation

$$V + \omega = n\pi;$$

et comme $\omega = -(\operatorname{tang} V - V) = V - \operatorname{tang} V$,

$$2V - \operatorname{tang} V = n\pi,$$

n étant entier quelconque.

Les points à tangente verticale par

$$V + \omega = (2n + 1)\frac{\pi}{2},$$

et, par suite,

$$2V - \text{tang}\, V = (2n + 1)\frac{\pi}{2}.$$