NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

BRESHMANN

Théorie du mouvement relatif

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 49-55

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__49_0>

THÉORIE DU MOUVEMENT RELATIF;

PAR M. BRESHMANN,
Professseur à l'Université de Moscou.

Soient $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ trois axes fixes, Ox, Oy, Oz trois axes mobiles autour d'une même origine O; on a pour un point M dont les coordonnées sont ξ, η, ζ

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \xi &= a_1 x + b_1 y + c_1 z,\\ \eta &= a_2 x + b_2 y + c_2 z,\\ \zeta &= a_3 x + b_3 y + c_3 z.\end{aligned}\right.$$

Lorsque la position des axes varie sans qu'ils cessent d'être perpendiculaires entre eux, on aura

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} d\xi &= a_1 dx + b_1 dy + c_1 dz + x da_1 + y db_1 + z dc_1,\\ d\eta &= a_2 dx + b_2 dy + c_2 dz + x da_2 + y db_2 + z dc_2,\\ d\zeta &= a_3 dx + b_3 dy + c_3 dz + x da_3 + y db_3 + z dc_3;\end{aligned}\right.$$

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} d^2\xi = a_1 d^2x + b_1 d^2y + c_1 d^2z &\\ + 2(da_1 dx + db_1 dy + dc_1 dz)&\\ + dx d^2a_1 + dy d^2b_1 + dz d^2c_1&,\\ d^2\eta = a_2 d^2x + b_2 d^2y + c_2 d^2z &\\ + 2(da_2 dx + db_2 dy + dc_2 dz)&\\ + dx d^2a_2 + dy d^2b_2 + dz d^2c_2&,\\ d^2\zeta = a_3 d^2x + b_3 d^2y + c_3 d^2z &\\ + 2(da_3 dx + db_3 dy + dc_3 dz)&\\ + dx d^2a_3 + dy d^2b_3 + dz d^2c_3&.\end{aligned}\right.$$

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \Sigma adb + \Sigma bda &= 0,\\ \Sigma cda + \Sigma adc &= 0,\\ \Sigma bdc + \Sigma cdb &= 0,\end{aligned}\right.$$

où Σ désigne une somme de trois termes qui ont respectivement les indices 1, 2, 3, par exemple

$$\Sigma adb = a_1 db_1 + a_2 db_2 + a_3 db_3.$$

Mettons en ordre cyclique

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \Sigma adb &= - d\varphi_3 = - \Sigma bda,\\ \Sigma cda &= - d\varphi_2 = - \Sigma adc,\\ \Sigma bdc &= - d\varphi_1 = - \Sigma cdb,\end{aligned}\right.$$

nous aurons

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \Sigma ad^2 b &= - d^2\varphi_3 - \Sigma dadb,\\ \Sigma ad^2 c &= - d^2\varphi_2 - \Sigma dadc,\\ \Sigma ad^2 a &= - \Sigma (da)^2.\end{aligned}\right.$$

La dernière de ces équations est la seconde différentielle de l'équation $\Sigma a^2 = 1$. Il nous suffira de trouver la valeur de $d^2\xi$ pour écrire celles de $d^2\eta$, $d^2\zeta$. Supposons qu'à la fin du temps t les axes mobiles coïncident avec les axes fixes et remarquons que a, b, c désignent respectivement les cosinus des angles formés par les axes x, y, z avec les axes indiqués par les indices 1, 2, 3, qui signifient ξ, η, ζ, on aura

$$a_1 = 1,\quad b_2 = 1,\quad c_3 = 1,\quad da = 0,\quad db_2 = 0,\quad dc_3 = 0;$$

mais $d^2 a$, $d^2 b_2$, $d^2 c_3$ ne sont pas $= 0$, tous les autres cosinus a_2, a_3, b_1, b_3, c_1, c_2 disparaissent; donc les équations (5) et (6) deviendront

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} db_1 &= - d\varphi_3 = - da_2,\\ da_3 &= - d\varphi_2 = - dc_1,\\ dc_2 &= - d\varphi_1 = - db_3,\end{aligned}\right.$$

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} d^2 b_1 &= - d^2\varphi_3 - da_3\, db_3 = - d^2\varphi_3 + d\varphi_1\, d\varphi_2,\\ d^2 c_1 &= a^2\varphi_2 - da_2\, dc_2 = d^2\varphi_2 + d\varphi_3\, d\varphi_1,\\ d^2 a_1 &= - (da_2)^2 - (da_3)^2 = - (d\varphi_2)^2 - (d\varphi_3)^2.\end{aligned}\right.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans la première des équations (3) et qu'on mette pour abréger

$$\frac{d\varphi_1}{dt}=\omega_1,\quad \frac{d\varphi_2}{dt}=\omega_2,\quad \frac{d\varphi_3}{dt}=\omega_3,$$

$$\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2=\omega^2,$$

on obtient

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}=\frac{d^2x}{dt^2}+2\left(\omega_2\frac{dz}{dt}-\omega_3\frac{dy}{dt}\right)+z\frac{d\omega_2}{dt}-y\frac{d\omega_3}{dt}$$
$$+\omega_1(\omega_1x+\omega_2y+\omega_3z)-\omega_1^2x.$$

La loi de composition du second membre de cette équation donne immédiatement le moyen d'écrire les valeurs de $\frac{d^2\eta}{dt^2}$, $\frac{d^2\zeta}{dt^2}$. Lorsque l'origine a aussi un mouvement d'entraînement et qu'on désigne ses coordonnées par α, β, γ relativement à trois axes fixes parallèles à ceux de ξ, η, ζ, on a

$$x_1=\xi+\alpha,\quad y_1=\eta+\beta,\quad z=\zeta+\gamma,$$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=\frac{d^2\xi}{dt^2}+\frac{d^2\alpha}{dt^2},$$

$$\frac{d^2y_1}{dt^2}=\frac{d^2\eta}{dt^2}+\frac{d^2\beta}{dt^2},$$

$$\frac{d^2z_1}{dt^2}=\frac{d^2\zeta}{dt^2}+\frac{d^2\gamma}{dt^2},$$

donc

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=\mathrm{X}=\frac{d^2\alpha}{dt^2}+\frac{d^2x}{dt^2}+2\left(\omega_2\frac{dz}{dt}-\omega_3\frac{dy}{dt}\right)$$
$$+z\frac{d\omega_2}{dt}-y\frac{d\omega_3}{dt}+\omega_1(\omega_1x+\omega_2y+\omega_3z)-\omega^2x;$$

$$Y = \frac{d^2\beta}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2} + 2\left(\omega_3\frac{dx}{dt} - \omega_1\frac{dz}{dt}\right) + x\frac{d\omega_3}{dt} - z\frac{d\omega_1}{dt}$$
$$+ \omega_2(\omega_1 x + \omega_2 y + \omega_3 z) - \omega^2 y,$$

$$Z = \frac{d^2\gamma}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2} + 2\left(\omega_1\frac{dy}{dt} - \omega_2\frac{dx}{dt}\right) + y\frac{d\omega_1}{dt} - x\frac{d\omega_2}{dt}$$
$$+ \omega_3(\omega_1 x - \omega_2 y + \omega_3 z) - \omega^2 z.$$

Pour faire usage de ces formules, il faut savoir ce que signifient ω_1, ω_2, ω_3 dont les valeurs sont données par les équations (7). En effet

$$db_1 = d\cos(y, \xi) = - d\varphi_3 = - d\cos(x, \eta)$$

ou

$$-\sin(y, \xi)\, d(y, \xi) = - d\varphi_3 = \sin(x, \eta)\, d(x, \eta),$$

et supposant qu'à la fin du temps t les axes x, y, z coïncident avec les ξ, η, ζ, on aura

$$\sin(y, \xi) = 1, \quad \sin(x, \zeta) = 1,$$

donc

$$d\varphi_3 = d(y, \xi)$$

ou

$$d\varphi_3 = - d(x, \zeta),$$

c'est-à-dire que $d\varphi_3$ est l'accroissement positif que reçoit pendant dt l'angle droit (y, ξ) à la fin du temps t ou la diminution de l'angle (x, ζ). Nous regarderons l'accroissement d'un angle comme positif ou négatif selon qu'il sera décrit autour de l'axe de gauche à droite ou inversement pour un œil qui se trouve sur l'axe positif, mais le signe donné à l'angle déterminera la direction de l'axe positif. On déduit de même des équations (7) que $d\varphi_1$, $d\varphi_2$ sont des angles infiniment petits décrits autour des axes ξ et η; donc

$$\omega_1 = \frac{d\varphi_1}{dt}, \quad \omega_2 = \frac{d\varphi_2}{dt}, \quad \omega_3 = \frac{d\varphi_3}{dt},$$

sont les vitesses angulaires autour des axes ξ, η, ζ. Remarquons que les déplacements du point M relativement aux axes fixes, seulement en vertu du mouvement des axes x, y, z autour de l'origine, sont, d'après les équations (1) et (7),

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} d_e\xi = x\,da_1 + y\,db_1 + z\,dc_1 = \zeta\,d\varphi_2 - \eta\,d\varphi_3, \\ d_e\eta = x\,da_2 + y\,db_2 + z\,dc_2 = \xi\,d\varphi_3 - \zeta\,d\varphi_1, \\ d_e\zeta = x\,da_3 + y\,db_3 + z\,dc_3 = \eta\,d\varphi_1 - \xi\,d\varphi_2. \end{cases}$$

Tels sont aussi les déplacements possibles d'un point quelconque d'un système invariable, qui peut se mouvoir autour d'une origine fixe. Le lieu des points qui restent immobiles pendant le mouvement des axes est une droite déterminée par les équations

$$d_e\xi = 0, \quad d_e\eta = 0, \quad d_e\zeta = 0,$$

c'est-à-dire

$$(l) \quad \begin{cases} \zeta\,d\varphi_2 - \eta\,d\varphi_3 = 0, \\ \xi\,d\varphi_3 - \zeta\,d\varphi_1 = 0, \\ \eta\,d\varphi_1 - \xi\,d\varphi_2 = 0, \end{cases}$$

ou, en divisant par dt,

$$(l) \quad \begin{cases} \zeta\omega_2 - \eta\omega_3 = 0, \\ \xi\omega_3 - \zeta\omega_1 = 0, \\ \eta\omega_1 - \xi\omega_2 = 0. \end{cases}$$

On tire de là

$$\frac{d\varphi_1}{\xi} = \frac{d\varphi_2}{\eta} = \frac{d\varphi_3}{\zeta} = \frac{d\varphi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}}$$

ou

$$\frac{\omega_1}{\xi} = \frac{\omega_2}{\eta} = \frac{\omega_3}{\zeta} = \frac{\omega}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}},$$

où

$$d\varphi = \sqrt{d\varphi_1^2 + d\varphi_2^2 + d\varphi_3^2}, \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}.$$

Ces équations donnent

$$\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}} = \cos(l, \xi) = \frac{d\varphi_1}{d\varphi} = \frac{\omega_1}{\omega},$$

$$\frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}} = \cos(l, \eta) = \frac{d\varphi_2}{d\varphi} = \frac{\omega_2}{\omega},$$

$$\frac{\zeta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}} = \cos(l, \zeta) = \frac{d\varphi_3}{d\varphi} = \frac{\omega_3}{\omega}.$$

D'ailleurs les équations (I), respectivement multipliées par ξ, η, ζ ou par $d\varphi_1$, $d\varphi_2$, $d\varphi_3$, donnent

$$\text{(II)} \quad \left\{ \begin{aligned} \xi d_e \xi + \eta d_e \eta + \zeta d_e \zeta &= 0, \\ d\varphi_1 d_e \xi + d\varphi_2 d_e \eta + d\varphi_3 d_e \zeta &= 0. \end{aligned} \right.$$

La première de ces équations montre que le déplacement $d_e\sigma$ dont les projections sont $d_e\xi$, $d_e\eta$, $d_e\zeta$ se fait sur une sphère décrite autour de l'origine, et la seconde, mise sous la forme

$$\frac{d\varphi_1}{d\varphi}\frac{d_e\xi}{d_e\sigma} + \frac{d\varphi_2}{d\varphi}\frac{d_e\eta}{d_e\sigma} + \frac{d\varphi_3}{d\varphi}\frac{d_e\zeta}{d_e\sigma} = \cos(l, d_e\sigma) = 0,$$

prouve que l'arc $d_e\sigma$ est perpendiculaire à la droite (l).

Soit $r = Mn$ le rayon de cet arc, $MO = R$, on tire des équations (I)

$$\begin{aligned} (d\xi)^2 + (d\eta)^2 + (d\zeta)^2 = d_e\sigma^2 &= d\varphi^2(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \\ &\qquad - (\xi d\varphi_1 + \eta d\varphi_2 + \zeta d\varphi_3)^2 \\ &= R^2 d\varphi^2 - R^2 d\varphi^2 . \cos^2(l, R), \\ &= R^2 d\varphi^2 \sin^2(l, R) = r^2 d\varphi^2, \end{aligned}$$

donc

$$d\varphi = \frac{d_e \sigma}{r}$$

est l'arc décrit autour de l'axe instantané, et, d'après les équations trouvées ci-dessus,

$$d\varphi_1 = d\varphi \cos(l, \xi)$$

ou

$$\omega_1 = \omega \cos(l, \xi), \quad \omega_2 = \omega \cos(l, \eta), \quad \omega_3 = \omega \cos(l, \zeta),$$

c'est-à-dire qu'en connaissant la vitesse angulaire autour d'une droite (l), on trouve sa composante autour d'une autre droite ξ en multipliant ω par $\cos(l, \xi)$ (*).