NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. ROMAND

# Question du concours d'agrégation pour les lycées (année 1862)

*Nouvelles annales de mathématiques 2e série*, tome 1 (1862), p. 470-473

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__470_1>

## QUESTION DU CONCOURS D'AGRÉGATION POUR LES LYCÉES (ANNÉE 1862);

SOLUTION DE M. J. ROMAND,
Licencié ès Sciences mathématiques et ès Sciences physiques.

---

*Composition en Analyse appliquée.*

*Étant données deux droites non situées dans le même plan, on fait passer par ces droites un paraboloïde hyperbolique auquel on mène un plan tangent parallèle à un plan fixe et donné : on demande le lieu du point de contact.*

L'origine des coordonnées sera le milieu O de la plus courte distance AA′ des deux droites données D, D′; les parallèles menées à ces droites par le point O seront les axes des $z$ et des $y$; l'axe des $x$ sera dans la direction de AA′, par conséquent perpendiculaire au plan $yz$.

En désignant par $2a$ la distance AA′, les équations des droites données sont

$$(\mathrm{D}) \qquad y = 0, \quad x = a, \qquad\qquad (\mathrm{D}') \qquad z = 0, \quad x = -a.$$

Soient

$$(\mathrm{G}) \qquad y = \beta x + b, \quad z = \gamma x + c$$

les équations d'une droite qui engendre un paraboloïde en restant assujettie aux deux conditions de glisser sur les deux droites données et d'être toujours parallèle à un plan directeur représenté par

$$(P) \qquad x + my + nz = p.$$

La première condition conduit à

$$(1) \qquad 0 = \beta a + b, \quad 0 = \gamma a - c;$$

la seconde à

$$(2) \qquad 1 + m\beta + n\gamma = 0.$$

L'élimination des quatre paramètres variables $\beta$, $\gamma$, $b$, $c$ entre ces trois équations et les deux équations (G) fournira celle du paraboloïde.

Les équations (G) et (1) donnent

$$\beta = \frac{y}{x - a}, \quad \gamma = \frac{z}{x + a};$$

remplaçant $\beta$ et $\gamma$ par ces valeurs dans l'équation (2), on a

$$(3) \qquad 1 + \frac{my}{x - a} + \frac{nz}{x + a} = 0,$$

d'où

$$x^2 + nzx + mxy + amy - anz - a^2 = 0;$$

$m$ et $n$ restant arbitraires, cette équation représente tout paraboloïde hyperbolique passant par les deux droites données D, D'.

D'après une règle connue, l'équation du plan tangent au point $x, y, z$ d'un de ces paraboloïdes est

$$(2x + my + nz)x' + m(x + a)y' + n(x - a)z' \\ + amy - anz - 2a^2 = 0.$$

Pour que ce plan soit parallèle au plan donné

$$(P') \qquad Ax' + By' + Cz' + D = 0,$$

il faut qu'on ait

(4) $$B(2x + my + nz) = Am(x + a),$$

(5) $$Cm(x + a) = Bn(x - a).$$

Il ne reste plus qu'à éliminer $m$ et $n$ entre ces deux équations et celle des paraboloïdes pour avoir l'équation du lieu géométrique demandé.

L'équation (5) donne $m = \frac{B(x-a)}{C(x+a)}n$; substituant cette valeur à $m$ dans l'équation (4) et tirant celle de $n$, on a

$$n = \frac{-2Cx(x+a)}{(x-a)(By - Ax - Aa) + Cz(x+a)},$$

$$m = \frac{-2Bx(x-a)}{(x-a)(By - Ax - Aa) + Cz(x+a)};$$

par la substitution de ces valeurs à $m$, $n$ dans l'équation (3), on obtient d'abord

$$1 - \frac{2Bxy + 2Czx}{(x-a)(By - Ax - Aa) + Cz(x+a)} = 0,$$

puis, toutes réductions faites,

$$Ax^2 + Czx + Bxy + Bay - Caz - Aa^2 = 0.$$

Si le lieu avait un centre, les coordonnées de ce point seraient déterminées par les équations

(C) $\quad 2Ax + By + Cz = 0, \quad Bx + Ba = 0, \quad Cx - Ca = 0.$

Lorsque B et C diffèrent l'un et l'autre de zéro, les deux dernières sont incompatibles; le lieu n'a donc pas de centre. Son équation se réduit, pour $x = 0$, à

$$By - Cz - Aa = 0,$$

ce qui indique qu'il est coupé suivant une droite seulement par le plan $yz$; ce lieu est donc un *paraboloïde hyperbolique* ayant un plan directeur parallèle au plan

$yz$ et par conséquent parallèle aux deux droites D, D'. On voit facilement du reste qu'il passe par ces deux droites, car son équation est vérifiée par $y = 0$, $x = a$ pour toute valeur de $z$, et par $z = 0$, $x = -a$ pour toute valeur de $y$; c'est donc un des paraboloïdes indiqués dans l'énoncé.

B et C étant toujours supposés différents de zéro, lorsque $A = 0$, c'est-à-dire lorsque le plan donné (P') est parallèle à la plus courte distance AA', le lieu est encore un paraboloïde hyperbolique, et dans ce cas il contient, outre D et D', la plus courte distance AA', car son équation est vérifiée par $z = 0$, $x = 0$, quel que soit $x$.

Quand C ou B est nul, c'est-à-dire quand le plan (P') est parallèle à D ou à D', le lieu change de nature. Si l'on suppose par exemple $C = 0$, son équation se réduit à

$$Ax^2 + Bxy + Bay - Aa^2 = 0,$$

équation qui se décompose ainsi

$$(x + a)(By + Ax - Aa) = 0,$$

et qui montre que le lieu est formé du système de deux plans.

Le premier, $(x + a) = 0$, parallèle au plan des $yz$, passe par la droite D'.

Le second, $By + Ax - Aa = 0$, parallèle au plan donné $Ax + By + D = 0$, passe par la droite D.

Enfin, quand on a en même temps $C = 0$, $B = 0$, c'est-à-dire lorsque le plan (P') est parallèle à D et à D', le lieu se compose de deux plans parallèles, car son équation se réduit à $x^2 - a^2 = 0$. C'est le système de deux plans menés respectivement par D, D' et parallèles à (P').