NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

N. NICOLAÏDÈS

Démonstration des théorèmes de M. Paul Serret

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 464-470

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__464_1>

DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES DE M. PAUL SERRET

(voir p. 323),

PAR M. N. NICOLAÏDÈS (DE LA GRÈCE),
Élève externe des Ponts et Chaussées.

1. *Soient* $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ *les longueurs des côtés consécutifs d'un polygone* ABCD..., *inscrit dans un cercle;* M *un point pris sur l'arc sous-tendu par le côté* a_1 *ou* AB; $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ *les distances positives de* M *aux côtés* $a_1, a_2, \ldots, a_n$; *on aura*

$$(1) \qquad \frac{a_1}{p_1} = \frac{a_2}{p_2} + \frac{a_3}{p_3} + \ldots + \frac{a_n}{p_n}.$$

Si ce théorème est vrai dans le cas d'un triangle, il existera de même pour un polygone d'un nombre quelconque de côtés.

En effet, nommons $b_1, b_2, \ldots, b_{n-2}$ les diagonales AC, AD,..., menées du point A aux sommets C, D,..., du polygone, et $q_1, q_2, \ldots, q_{n-2}$ les distances positives du point M à ces diagonales; on aura par hypothèse

$$\frac{a_1}{p_1} = \frac{a_2}{p_2} + \frac{b_1}{q_1}, \quad \frac{b_1}{q_1} = \frac{a_3}{p_3} + \frac{b_2}{q_2}, \ldots, \quad \frac{b_{n-2}}{q_{n-2}} = \frac{a_{n-1}}{p_{n-1}} + \frac{a_n}{p_n}.$$

En additionnant ces équations, on trouve l'égalité (1).

Tout se réduit donc à démontrer le théorème pour le cas particulier d'un triangle ABC.

Prenons pour axes les côtés AB, AC qui forment un angle θ; et désignons par x', y' les coordonnées du point M extérieur au triangle ABC, dont le côté BC a pour équation $y = ax + b$.

Les longueurs des côtés AB, AC, BC seront

$$b, \quad \frac{-b}{a}, \quad \frac{-b}{a}\sqrt{a^2 + 1 + 2a\cos\theta},$$

et les distances positives du point M (x', y') à ces côtés auront pour valeurs

$$-x'\sin\theta, \quad y'\sin\theta, \quad \frac{-(y' - ax' - b)\sin\theta}{\sqrt{a^2 + 1 + 2a\cos\theta}}.$$

L'équation

$$\frac{a_1}{p_1} = \frac{a_2}{p_2} + \frac{a_3}{p_3}$$

deviendra

$$\frac{-b}{x'\sin\theta} = \frac{-b}{a\sin\theta} + \frac{b(a^2 + 1 + 2a\cos\theta)}{a(y' - ax' - b)\sin\theta}$$

ou

$$-ay'(y' - ax' - b)$$
$$= -x'(y' - ax' - b) + x'y'(a^2 + 1 + 2a\cos\theta).$$

Développant et réduisant, on trouve

$$a(x'^2 + y'^2) + 2ax'y'\cos\theta + bx' - aby' = 0,$$

équation d'une circonférence circonscrite au triangle ABC. Ainsi la relation générale (1) est établie.

La réciproque se déduit facilement de la proposition directe, au moyen de la méthode connue de réduction à l'absurde. Et de cette réciproque on conclura que si le point M se meut sous la condition que ses distances positives $p_1, p_2, \ldots, p_n$ aux côtés du polygone inscrit, sont liées par la relation (1), le point M décrit l'arc du cercle circonscrit au polygone, sous-tendu par le côté a_1.

Remarquons que deux des distances p_1, p_2 changent de signe quand le point M passe par l'un des sommets du polygone inscrit.

2. Théorème III (p. 324). — *Soient* O, O′ *deux cercles fixes coupés par un troisième variable* O″ *à angles droits; le premier aux points* A, B, *le second en* C *et* D; *les côtés opposés* AD, BC *du quadrilatère* ABCD *se couperont en un point fixe, et il en sera de même des diagonales* AC, BD.

Supposons que les rayons OA, O′D prolongés se rencontrent en F; les droites FA, FD seront égales comme tangentes menées du point F à la circonférence variable O″. Il en résulte que le point F est le centre d'une circonférence qui touche extérieurement les circonférences fixes O et O′ aux points A et D; donc la corde des contacts A, D prolongée passera par le point H où la droite des centres OO′ est rencontrée par une tangente commune aux deux circonférences O, O′. C'est là une proposition connue. De même la droite BC prolongée passera par le point H. Ainsi les côtés opposés AD, BC du quadrilatère variable ABCD se coupent en un point fixe.

Actuellement, soit F′ l'intersection des rayons AO, O′C prolongés. On aura F′A = F′C comme tangentes menées du point F à la circonférence variable O″. Il s'ensuit que la circonférence décrite du point F′ comme centre avec OA touche intérieurement la circonférence O au point A, et extérieurement la circonférence O′ au point C. Par conséquent, la corde des deux contacts AC rencontre la droite OO′ en un point H′ appartenant à une tangente commune aux deux circonférences O et O′. On voit de même que H′ appartient à la droite BD. Donc les diagonales AC, BD du quadrilatère variable ABCD se coupent en un point fixe H′.

Le même théorème a encore lieu lorsqu'une des deux circonférences O, O′ est remplacée par une droite indéfinie.

3. Théorèmes VI et VII (p. 324). — *Un cercle variable passant constamment par un point fixe* O, *si l'enveloppe de la droite qui réunit ses traces sur un cercle fixe est représentée par* $f(\rho, \omega) = 0$, *l'équation*

$$f\left(\frac{m}{\rho + n\cos\omega}, \omega\right) = 0,$$

où m et n désignent des constantes, représentera l'enveloppe du cercle variable.

Prenons le point fixe O comme origine des coordonnées polaires et la droite qui unit ce point au centre C du cercle fixe pour axe polaire; en désignant par α, 6 les coordonnées rectangulaires du centre du cercle variable, l'équation de ce cercle sera

$$(1) \qquad \rho = 2(\alpha\cos\omega + 6\sin\omega).$$

Soient A le rayon du cercle fixe, et p la distance de son centre C au pôle O. Ce cercle sera représenté par

$$(2) \qquad \rho^2 - 2\rho p\cos\omega + p^2 = A^2.$$

La combinaison des équations (1) et (2) donne

$$(3) \qquad 2\rho(\alpha\cos\omega + 6\sin\omega - p\cos\omega) = A^2 - p^2;$$

c'est l'équation de la droite passant par les points d'intersection de deux cercles.

Pour obtenir l'enveloppe de la circonférence (1), en considérant β comme une fonction quelconque de α, il faut d'abord différentier l'équation (1) par rapport à α, ce qui donne

$$(4)\qquad \cos\omega + \sin\omega\cdot\frac{d\beta}{d\alpha} = 0.$$

Cette dernière équation représente, pour des valeurs déterminées de α et β, une droite menée par l'origine O, parallèlement à la normale, au point α, β, à la courbe décrite par le centre du cercle variable. Cette droite doit d'ailleurs contenir le point auquel la circonférence variable touche son enveloppe.

Or, en différentiant de même par rapport à α l'équation (3) de la corde variable, on a encore l'équation (4); donc, pour des valeurs déterminées de α et β, les points auxquels les lignes (1) et (3) touchent leurs enveloppes appartiennent à la droite (4). Les rayons vecteurs menés de l'origine à ces deux points de contact sont d'ailleurs donnés par les équations (1) et (3) dans lesquelles la valeur de ω est la même. Il en résulte qu'en nommant ρ' le premier rayon vecteur et ρ le second, on a

$$\rho\,(\rho' - 2p\cos\omega) = A^2 - p^2,$$

d'où

$$(5)\qquad \rho = \frac{A^2 - p^2}{\rho' - 2p\cos\omega}.$$

Par conséquent, si l'équation de l'enveloppe de la droite (3) est $f(\rho, \omega) = 0$, celle de l'enveloppe de la circonférence mobile (1) sera

$$f\left(\frac{A^2 - p^2}{\rho' - 2p\cos\omega}, \omega\right) = 0 \quad \text{ou} \quad f\left(\frac{A^2 - p^2}{\rho - 2p\cos\omega}, \omega\right) = 0.$$

Le théorème VII est ainsi démontré.

Si l'on suppose $p = 0$, l'équation (5) se réduit à $\rho\rho' = A^2$, ce qui démontre le théorème VI (p. 234).

Remarque. — L'équation différentielle

$$(6)\quad \left(x\frac{dy^2}{dx^2} - y\frac{dy}{dy}\right)^2 + \left(y - x\frac{dy}{dx}\right) = A\left(\frac{dy^2}{dx^2} + 1\right)^2.$$

représente les courbes que le centre du cercle variable doit décrire pour que son enveloppe soit un cercle, A est une constante.

Une intégrale de cette équation est $x^2 + y^2 = A$ (*).

Note du Rédacteur. — M. Nicolaïdès a aussi résolu la question 627 (p. 447), et il a joint à sa solution la remarque suivante :

Si le milieu d'une droite inscrite dans un angle YOX *est sur la parabole* $y^2 = 2px$, *cette droite sera tangente à la parabole* $y^2 = -16px$.

En effet, désignons par $y = ax + b$ l'équation de la droite inscrite dans l'angle YOX ; les coordonnées de son milieu seront

$$y = \frac{b}{2},\quad x = -\frac{b}{2a}.$$

Ce point appartenant à la parabole $y^2 = 2px$, on aura

$$\frac{b^2}{4} = -\frac{bp}{a} \quad \text{ou} \quad b = -\frac{4p}{a}.$$

(*) En posant $\frac{dy}{dx} = p$ et supprimant le facteur commun $p^2 + 1$, l'équation différentielle (6) se réduit à

$$(y - px)^2 - A(p^2 + 1) = 0.$$

En différentiant cette dernière par rapport à x, il vient

$$[(y - px)x + Ap]dp = 0,$$

d'où

$$dp = 0 \quad \text{ou} \quad p = c \quad \text{et} \quad (y - px)x + Ap = 0.$$

L'élimination de p entre $p = c$ et $(y - px)^2 - A(p^2 + 1) = 0$ donne immédiatement $(y - cx)^2 - A(c^2 + 1) = 0$; c'est l'intégrale générale de l'équation différentielle proposée.

En éliminant p entre $(y - px)x + Ap = 0$ et $(y - px)^2 - A(p^2 + 1) = 0$, on trouve $x^2 + y^2 = A$; ce qui est une *solution singulière*. G.

Par suite l'équation $y = ax + b$ devient

$$y = ax - \frac{4p}{a} \quad \text{ou} \quad a^2x - ay - 4p = 0.$$

En éliminant a entre cette dernière équation et sa dérivée par rapport à a, on trouve

$$y^2 + 16px = 0$$

pour l'enveloppe des droites inscrites dans YOX et qui ont leurs milieux sur $y^2 = 2px$. C. Q. F. D.