NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L. ANDLAUER
G. CHAUVEAU

Question 629 (Vannson)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 462-464
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__462_0>

QUESTION 629 (VANNSON);

SOLUTION DE MM. L. ANDLAUER ET G. CHAUVEAU,
Elèves de mathématiques spéciales.

Prenons pour axes de coordonnées trois arêtes contiguës du tétraèdre et soient $2a$, $2b$, $2c$ les longueurs de ces arêtes.

L'équation générale des surfaces du second degré est

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0.$$

Pour que les axes soient tangents à cette surface aux points

$$\begin{array}{lll} x = 0, & x = 0, & x = a, \\ y = 0, & y = b, & y = 0, \\ z = c, & z = 0, & z = 0, \end{array}$$

il faut, en posant $D = 1$, que l'on ait

$$A'' = \frac{1}{c^2}, \quad A' = \frac{1}{b^2}, \quad A = \frac{1}{a^2},$$

$$C'' = -\frac{1}{c}, \quad C' = -\frac{1}{b}, \quad C = -\frac{1}{a}.$$

L'équation de la surface devient donc

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy - \frac{2x}{a} - \frac{2y}{b} - \frac{2z}{c} + 1 = 0.$$

Il faut exprimer maintenant que cette surface passe par les milieux des trois autres arêtes, c'est-à-dire que son équation est satisfaite par

$$
\begin{array}{lll}
x = 0, & y = 0, & z = 0, \\
y = b, & z = c, & x = a, \\
z = c, & x = a, & y = b,
\end{array}
$$

ce qui nous donne

$$B = \frac{1}{2bc}, \quad B' = \frac{1}{2ac}, \quad B'' = \frac{1}{2ab}.$$

Il nous vient donc pour l'équation de la surface

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{yz}{bc} + \frac{zx}{ca} + \frac{xy}{ab} - \frac{2x}{a} - \frac{2y}{b} - \frac{2z}{c} + 1 = 0.$$

Il est clair maintenant que cette surface est tangente à ces trois autres arêtes; en effet, si nous cherchons son intersection avec l'une d'elles, nous trouvons pour

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = 2, \\ y = 0, \end{array} \right.$$

que les z d'intersection sont donnés par

$$\left(\frac{z}{c} - 1\right)^2 = 0,$$

ce qui prouve bien que la droite est tangente à la surface.

Les équations qui déterminent les coordonnées du centre de cette surface sont

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{z}{ac} + \frac{y}{ab} - \frac{2}{a} = 0,$$

$$\frac{2y}{b^2} + \frac{z}{bc} + \frac{x}{ab} - \frac{2}{b} = 0,$$

$$\frac{2z}{c^2} + \frac{y}{bc} + \frac{x}{ac} - \frac{2}{c} = 0.$$

Et ces équations sont satisfaites par les coordonnées du centre de gravité du tétraèdre

$$x = \frac{a}{2}, \quad y = \frac{b}{2}, \quad z = \frac{c}{2}.$$

Si l'on rapporte la surface à son centre, son équation est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{yz}{bc} + \frac{zx}{ca} + \frac{xy}{ab} = \frac{1}{2}.$$

Note. — La même solution nous a été adressée par MM. Hans et Vandenbroncque, élèves du lycée Saint-Louis (classe de M. Briot).