ERNEST HANS

VICTOR VANDENBRONCQUE

Question 626 ; solution

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 458-461

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__458_1>

QUESTION 626;

SOLUTION

DE MM. ERNEST HANS ET VICTOR VANDENBRONCQUE,
Elèves du lycée Saint-Louis (classe de M. Briot).

Je prends pour axes des coordonnées les diagonales du

(*) M. Joseph Sacchi a démontré la même proposition et deux autres également remarquables, relatives à l'enveloppe d'une droite. Les démonstrations de M. Sacchi seront insérées dans le numéro de janvier. G.

quadrilatère; et j'appelle a, a'; b, b' les segments de chacune des diagonales, qui sont des coordonnées des quatre sommets du quadrilatère.

L'équation d'une conique passant par les points milieux des côtés du quadrilatère est

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)\left(x-\frac{a'}{2}\right)=\lambda\left(y-\frac{b}{2}\right)\left(y-\frac{b'}{2}\right).$$

Je détermine λ par la condition que la courbe doit passer par le point milieu de l'une des diagonales

$$\left(x=0,\quad y=\frac{b+b'}{2}\right),\quad \text{d'où}\quad \lambda=\frac{aa'}{bb'};$$

l'équation de la conique devient

$$\frac{\left(x-\frac{a}{2}\right)\left(x-\frac{a'}{2}\right)}{aa'}=\frac{\left(y-\frac{b}{2}\right)\left(y-\frac{b'}{2}\right)}{bb'}$$

ou

$$\frac{1}{aa'}\left(x^2-\frac{a+a'}{2}x\right)=\frac{1}{bb'}\left(y^2-\frac{b+b'}{2}y\right).$$

Sous cette forme l'équation montre que la courbe passe par l'origine et par le milieu $\left(y=0,\ x=\frac{a+a'}{2}\right)$ de l'autre diagonale.

Le point de rencontre des deux côtés opposés dont les équations sont

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,\quad \frac{x}{a'}+\frac{y}{b'}=1,$$

est sur la courbe.

Car on peut mettre l'équation de la courbe sous la forme

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{a'}-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{y}{b}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{y}{b'}-\frac{1}{2}\right),$$

et en y remplaçant $\frac{x}{a}$, $\frac{x}{a'}$ par leurs valeurs $1-\frac{y}{b}$, $1-\frac{y}{b'}$, on arrive à une identité.

Discussion. — L'équation de la courbe peut s'écrire

$$\frac{\left(x-\frac{a+a'}{4}\right)^2}{aa'}-\frac{\left(y-\frac{b+b'}{4}\right)^2}{bb'}=\frac{\left(\frac{a+a'}{4}\right)^2}{aa'}-\frac{\left(\frac{b+b'}{4}\right)^2}{bb'}.$$

1° Si le quadrilatère est convexe, la courbe est une hyperbole, car a, a' sont de signes contraires, ainsi que b et b'. Le centre est le point $\left(x=\frac{a+a'}{4}, y=\frac{b+b'}{4}\right)$, milieu de la droite qui unit les milieux des diagonales.

Les diagonales sont parallèles à un système de diamètres conjugués. Les asymptotes sont parallèles aux droites $\frac{y^2}{bb'}-\frac{x^2}{aa'}=0$.

Dans le cas particulier où $a^2+a'^2=b^2+b'^2$, le lieu se réduit à deux droites.

Si le quadrilatère est inscriptible à un cercle, on a

$$aa'=bb',$$

la courbe devient une hyperbole équilatère, et les asymptotes sont parallèles aux bissectrices des angles des diagonales.

Le centre de la circonférence circonscrite est déterminé par l'intersection des perpendiculaires élevées sur les milieux des diagonales, ayant pour équations

$$(\alpha) \qquad x+y\cos\theta=\frac{a+a'}{2},$$

et

$$(\beta) \qquad y + x\cos\theta = \frac{b+b'}{2}.$$

Remplaçant dans l'équation de la courbe qui devient, lorsque $aa' = bb'$,

$$x\left(x - \frac{a+a'}{2}\right) = y\left(y - \frac{b+b'}{2}\right),$$

$x - \dfrac{a+a'}{2}$, $y - \dfrac{b+b'}{2}$ par leurs valeurs tirées des équations (α), (β), on arrive à une identité; donc ce centre appartient à l'hyperbole équilatère.

2° Si le quadrilatère n'est pas convexe, c'est-à-dire s'il est formé de deux triangles ayant une base commune et situés d'un même côté de cette base, les produits aa', bb' ont des signes contraires, et la courbe représentée par l'équation

$$\frac{\left(x - \dfrac{a+a'}{4}\right)^2}{aa'} - \frac{\left(y - \dfrac{b+b'}{4}\right)^2}{bb'} = \frac{\left(\dfrac{a+a'}{4}\right)^2}{aa'} - \frac{\left(\dfrac{b+b'}{4}\right)^2}{bb'}$$

est une ellipse réelle.

Si $aa' = -bb'$, les diamètres parallèles aux diagonales sont égaux, et lorsque les diagonales sont rectangulaires, la courbe est une circonférence.

Note. — M. V. R. (à Cahors) nous a adressé une solution entièrement semblable à la précédente, et suivie de la même discussion.

Cette question a aussi été résolue par M. Abraham Schnée, élève du lycée Charlemagne.