NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. DELORME

Solution de la question 630 généralisée

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 455-458
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__455_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 630 GÉNÉRALISÉE;

PAR M. H. DELORME.

Le système des deux équations

$$x^{2m} = ay^{2n} + 1, \quad x^{2p+1} = by^{2q+1} + c,$$

dans lesquelles $a + 1$ *et* c *sont des multiples de* 3, *et* b *un nombre entier non divisible par* 3, *n'admet ni solution entière, ni solution composée d'une valeur entière d'une inconnue et d'une valeur fractionnaire de l'autre.*

Nous allons d'abord poser quelques principes d'arithmétique sur les nombres non divisibles par 3.

I. Le produit ou le quotient (*) de deux nombres de la forme $3k + 1$ ou de la forme $3k - 1$ est de la forme $3k + 1$.

II. Le produit ou le quotient de deux nombres de

(*) Je suppose la division possible. Les deux principes s'étendent facilement au cas d'un nombre quelconque de facteurs.

formes différentes $3k+1$, $3k-1$ est de la forme $3k-1$.

Cela posé, revenons à notre question, que nous diviserons en trois parties :

1° Si l'on donne à x une valeur entière, aucune valeur entière de y ne satisfait aux équations proposées.

En effet, ou x est divisible par 3 ou il ne l'est pas. Si x est divisible par 3, $x^{2p+1}-c$ le sera; by^{2q+1} devra donc l'être; donc y devra être divisible par 3: or, si x et y sont divisibles par 3, la première équation ne peut être satisfaite. Si x n'est pas divisible par 3, x^{2m}, en vertu du principe précédent (II), sera de la forme $3k+1$; donc $x^{2m}-1$ est divisible par 3, donc ay^{2n} devra l'être, et a ne l'étant pas, y le sera : mais l'hypothèse de x non divisible et de y divisible par 3 est contraire à la seconde équation $x^{2p+1}=by^{2q+1}+c$.

Le système de ces deux équations n'admettra donc pas de solution entière.

2° y étant un nombre entier, aucune valeur fractionnaire de x ne satisfait aux deux équations. En effet, a, y et 1 étant des nombres entiers, le second membre de la première équation est entier, le premier doit donc l'être.

3° x étant un nombre entier, y ne peut être une fraction.

En effet, écrivons les équations

$$x^{2m}-1=ay^{2n},$$
$$x^{2p+1}-c=by^{2q+1};$$

les premiers membres étant entiers, les seconds devront l'être, ce qui n'aura pas lieu si y est de la forme $\frac{u}{t}$, sauf les cas ou t^{2n} est un diviseur de a et t^{2q+1} un diviseur de b.

Examinons ce cas. Remarquons d'abord que t ne peut être divisible par 3. Remplaçons dans les deux équations

y par $\frac{u}{t}$, on aura

$$x^{2m} = \frac{a}{t^{2n}} u^{2n} + 1,$$

$$x^{2p+1} = \frac{b}{t^{2q+1}} u^{2q+1} + c.$$

Il faut chercher si ce système d'équations peut être satisfait par des valeurs entières de x et de u. Or nous sommes ramenés au cas précédent, car, b et t^{2q+1} n'étant pas divisibles par 3, $\frac{b}{t^{2q+1}}$ ne l'est pas non plus.

a est de la forme $3k - 1$, t^{2n} de la forme $3k + 1$, Donc, d'après le principe (II), $\frac{a}{t^{2n}}$ est de la forme $3k - 1$. Nous avons vu que ce système d'équations n'admettait pas de solution entière; donc à une valeur entière de x ne peut répondre une valeur fractionnaire de y.

Note. — La question 630, non généralisée, a été résolue par M. Mogni; par M. Thomasset, élève du lycée de Lyon; et par MM. Hans et Vandenbroncque, élèves du lycée Saint-Louis.

M. Mogni nous a aussi adressé une solution de la question 616, déjà résolue par M. Siacci (numéro de septembre, p. 328). Nous en prenons occasion de faire observer que cette proposition (616) n'est qu'un cas particulier d'une proposition générale dont voici l'énoncé.

Soit AB *une droite d'une longueur déterminée dont les deux extrémités* A, B *sont assujetties à rester sur deux lignes données* M, N, *de formes quelconques, mais situées dans un même plan. Si par les points* A, B, *on mène des normales aux lignes* M, N, *et que du point de rencontre* C *de ces normales on abaisse une perpendiculaire* CD *sur la droite* AB, *le pied* D *de cette per-*

pendiculaire sera le point auquel AB *touche son enveloppe.*

Cette proposition générale est due, je le crois du moins, à de l'Hospital; il l'a démontrée dans son *Analyse des infiniment petits* (p. 189, 2e édition, 1715).

On en trouve aussi une démonstration dans les *Éléments de Calcul infinitésimal* de M. Duhamel (t. Ier, p. 209; édition de 1856) (*).

Lorsque les lignes M, N sont des droites OX, OY, les normales AC, BC deviennent des perpendiculaires à OX, OY; le quadrilatère OACB est inscriptible dans le cercle dont OC est un diamètre, et si du point O on abaisse une perpendiculaire OF sur la corde AB, on aura évidemment

$$BF = AD, \quad AF = BD,$$

ce sont les égalités énoncées dans la proposition (616).

Quand l'angle XOY est droit, l'enveloppe de AB est l'épicycloïde engendrée par un point d'une circonférence dont le rayon est égal au quart de AB, et qui roule intérieurement sur la circonférence décrite du point O comme centre avec AB pour rayon. C'est démontré, sans aucun calcul, dans le *Cours d'Analyse* de Sturm (t. II, p. 73). G.