CROFTON

De l’équation du système de quatre normales menées d’un point à une ellipse

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 449-455

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__449_1>

DE L'ÉQUATION DU SYSTÈME DE QUATRE NORMALES MENÉES D'UN POINT A UNE ELLIPSE;

PAR M. CROFTON.

Trouver l'équation du quatrième degré qui représente les quatre normales menées du point (α, β) *à l'ellipse* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Posons

$$H = c^2 xy - a^2 \alpha y + b^2 \beta x, \quad L = c^2 \alpha\beta - a^2 \beta x + b^2 \alpha y,$$

l'équation cherchée sera

$$\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1\right) H^2 + 2\left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1\right) HL + \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) L^2 = 0.$$

Pour le démontrer, nous remarquons d'abord que $H = 0$ est une hyperbole qui passe par les quatre points où l'ellipse est rencontrée par les quatre normales menées de (α, β), et aussi par le point (α, β); et que $L = 0$ est la tangente à cette hyperbole au point (α, β). Or, si U_1 et U_2 sont deux polynômes indéterminés respectivement du premier et second degré en x et y, l'équation

(1) $$H^2 + U_1 HL + U_2 L^2 = 0$$

est l'équation générale d'une courbe du quatrième degré dont deux branches se touchent au point (α, β), la tangente commune étant $L = 0$. Comme quatre lignes droites passant par (α, β) en sont un cas particulier, l'équation que nous cherchons sera de la forme (1), où il reste à déterminer U_1 et U_2. Or, comme la courbe (1) doit passer par les intersections de $H = 0$ avec l'ellipse

$$\mathcal{E} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

il faut d'abord que $U_2 = k\mathcal{E}$, k étant une constante; donc l'équation (1) devient

(2) $$H^2 + U_1 HL + k\mathcal{E} L^2 = 0.$$

Pour que l'équation (2) représente quatre droites, il faut que les intersections de la ligne (2) avec une droite quelconque (autre que les normales) passant par (α, β) coïncident avec le point (α, β). Or

$$H + L = c^2 (x - \alpha)(y - \beta),$$

c'est-à-dire que $H + L = 0$ représente deux droites passant par (α, β). Leurs intersections avec la ligne (2) sont données par

$$(1 - U_1 + k\mathcal{E}) L^2 = 0.$$

Cette équation se décompose en deux facteurs dont le premier, $L^2 = 0$, représente une droite qui rencontre les lignes $H + L = 0$ en (α, β) seulement; et pour qu'il en soit de même de l'autre, $1 - U_1 + k\mathcal{E} = 0$, il faut déterminer k et U_1 de manière que cette équation représente le point (α, β). Pour cela nous devrons avoir

$$k\mathcal{E} - U_1 + 1 = k \left[\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} \right],$$

d'où

$$(3) \qquad U_1 - 1 = k \left(\frac{2\alpha x}{a^2} + \frac{2\beta y}{b^2} - \frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} - 1 \right).$$

Pour trouver une autre condition, supposons que la ligne (2) soit coupée par les deux droites imaginaires $k\mathcal{E} - U_1 + 1 = 0$; aux intersections, nous aurons

$$(H + L)(H + k\mathcal{E}L) = 0$$

ou bien

$$(H + L)[H + (U_1 - 1) L] = 0.$$

Or il faut que chacune des deux équations dont celle-ci se compose, savoir

$$H + L = 0, \quad H + k \left(\frac{2\alpha x}{a^2} + \frac{2\beta y}{b^2} - \frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} - 1 \right) L = 0,$$

représente deux droites passant par (α, β). Pour qu'il en soit ainsi de la seconde, il faut que

$$\mathrm{H}+k\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-1\right)\mathrm{L}=0$$

représente deux droites (*) ; d'où

$$(4) \qquad k\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-1\right)=1.$$

Substituant dans l'équation (2) les valeurs de U_1 et de k, tirées des équations (3) et (4), il vient pour l'équation des normales

$$\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-1\right)\mathrm{H}^2+2\left(\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}-1\right)\mathrm{HL}$$
$$+\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)\mathrm{L}^2=0.$$

On peut prouver de même que, si $\mathrm{U}=0$ est une conique quelconque, $\mathrm{T}=0$ la tangente au point (α, β), et δ une constante telle, que l'équation $\mathrm{U}+\delta\mathrm{T}=0$ représente deux droites, alors l'équation des quatre droites menées de (α, β) aux intersections de la conique $\mathrm{U}=0$

(*) Car, si $\mathrm{U}=0$ représente une courbe du second degré, $\mathrm{T}=0$ une tangente [au point (x', y')], $\mathrm{A}=0$ une droite quelconque, alors, pour que

$$\mathrm{U}+\mathrm{AT}=0$$

représente deux droites, il faut que

$$\mathrm{U}+\mathrm{A}'\mathrm{T}=0,$$

où A' représente la valeur de A quand on y substitue x', y' aux coordonnées courantes, soit aussi l'équation de deux droites (soit réelles, soit imaginaires).

avec l'ellipse E = o, sera

$$\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-1\right)U^2+2\delta\left(\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}-1\right)UT$$
$$+\delta^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)T^2=0.$$

Si L = o est une droite quelconque, (x', y') un point quelconque, L' la valeur de L quand on y substitue x' et y' à x et à y, l'équation

$$\left(\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-1\right)L^2-2\left(\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}-1\right)LL'$$
$$+\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)L'^2=0$$

représente les deux droites menées de (x', y') aux intersections de L = o avec l'ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

L'équation connue des deux tangentes menées de (x', y') à l'ellipse, savoir

$$\left(\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}-1\right)^2=\left(\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-1\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right),$$

en est un cas particulier.

On peut prouver directement que l'équation des quatre lignes droites, menées d'un point donné (α, β) aux quatre points où l'ellipse est rencontrée par une courbe quelconque du second degré H = o, qui passe par (α, β), sera

$$\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-1\right)H^2+2\delta\left(\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}-1\right)HL$$
$$+\delta^2\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-1\right)L^2=0,$$

où L = o est la tangente à H = o au point (α, β), et δ

une constante telle, que l'équation $H + \delta L = 0$ représente deux droites, réelles ou imaginaires.

Posons

$$\mathcal{E} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1, \quad P = \frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1, \quad A = \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1,$$

l'équation ci-dessus sera alors

$$AH^2 + 2\delta PHL + \delta^2 \mathcal{E} L^2 = 0;$$

la ligne qu'elle représente passe évidemment par les quatre intersections de $\mathcal{E} = 0$ avec $H = 0$. De plus, elle se compose de quatre lignes droites, passant par (α, β); car son équation peut s'écrire :

$$\delta^2 L^2 (\mathcal{E} - 2P + A) + AH^2 + 2\delta PHL + 2\delta^2 L^2 P - A\delta^2 L^2 = 0,$$

ou bien

$$\delta^2 L^2 (\mathcal{E} - 2P + A) + (H + \delta L)(AH - A\delta L + 2\delta PL) = 0$$

ou

$$(1) \quad \delta^2 L^2 (\mathcal{E} - 2P + A) + (H + \delta L)[A(H + \delta L) + 2\delta L(P - A)] = 0.$$

Or l'équation

$$A(H + \delta L) + 2\delta L(P - A) = 0$$

représente deux lignes droites passant par (α, β); car

$$A(H + \delta L) = 0 \quad \text{et} \quad 2\delta L(P - A) = 0$$

sont chacune l'équation de deux droites passant par (α, β). De plus

$$\mathcal{E} - 2P + A = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{(x - \alpha)^2}{a^2} + \frac{(y - \beta)^2}{b^2} = 0$$

représente deux droites imaginaires passant par (α, β). Par conséquent chacun des deux termes dont l'équation (1) se compose, égalé à zéro, représente quatre droites passant par (α, β); donc l'équation (1) elle-même représente quatre droites passant par (α, β).

Cette équation peut représenter les quatre rayons menés d'un point donné (α, β) à quatre points quelconques sur l'ellipse; car on peut toujours faire passer une conique par (α, β) et ces quatre points, et on peut toujours déterminer la constante δ, pour que $H + \delta L = 0$ représente deux droites.