L. CREMONA

Mémoire de géométrie pure sur les cubiques gauches

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 436-446

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__436_1>

MÉMOIRE DE GÉOMÉTRIE PURE SUR LES CUBIQUES GAUCHES

(voir p. 366);

Par M. L. CREMONA,
Professeur à l'Université de Bologne.

---

18. Je passe à considérer l'ellipse gauche. Cette courbe admet deux plans osculateurs parallèles a, b, qui contiennent deux paraboles A, B, inscrites dans la développable osculatrice (13 et 14). Soient α, β les points de contact de ces plans avec la courbe gauche ; αx, βy les droites tangentes, en ces points, à la même courbe, et par conséquent aux paraboles A, B respectivement. Il résulte de la théorie générale que αx est parallèle aux diamètres de B, et que βy est parallèle aux diamètres de A. Deux tangentes parallèles mp, nq (p, q points de contact) de ces

paraboles déterminent un plan osculateur, et pq est la droite tangente correspondante de la cubique gauche. Tâchons de découvrir l'espèce de conique inscrite située dans ce plan.

Soient m', m'' deux points de la parabole A tels, que $m'm''$ soit parallèle à mp; nous considérons $m'm''$ comme trace, sur le plan a, d'un plan parallèle au plan (mp, nq): la trace du même plan sur b sera parallèle à nq et coupera le diamètre βx de B en un point ν qu'on construit aisément. Car, si $m'm''$ rencontre αx en u, il suffira de prendre $n\nu = mu$ sur βx (*).

Soient $n'n''$ les points de la parabole B, où elle est touchée par des droites parallèles aux tangentes de A en m', m''. La corde de contact $n'n''$ passera par un point fixe de nq. Pour construire ce point, je suppose que $m'm''$ aille à l'infini; alors $n'n''$ deviendra tangente à B en β; donc le point cherché i est l'intersection de nq par βy.

Ainsi on obtient, dans le plan b, deux faisceaux homographiques: l'un de droites parallèles à nq, l'autre de droites issues du point i. Ces faisceaux ayant le rayon nq commun, homologue à soi-même, engendrent une droite R, qu'il s'agit de déterminer.

Si le rayon du second faisceau prend la position βy, la droite $m'm''$ (et par conséquent le rayon homologue de l'autre faisceau) s'éloigne à l'infini; donc R est parallèle à βy.

Si $m'm''$ passe par α, la tangente de A en un des points m', m'', devient αx; la tangente de B, parallèle à αx, est

(*) Il y a, sur la figure qui accompagne le Mémoire de M. Cremona, deux lignes cotées xx'. L'une, désignée dans le texte par αx, est tangente à la courbe A; l'autre, désignée par βx, est parallèle à αx et par conséquent est un diamètre de la parabole B. Il y a de même deux droites y, y' qu'on ne peut confondre, puisque l'une est désignée par αy, l'autre par βy. P.

à l'infini ; donc $n'n''$ devient parallèle à βx. Le rayon correspondant du premier faisceau passera par un point c de βx, qu'on détermine en prenant $nc = m\alpha$.

Or les deux faisceaux dont il s'agit marquent sur βx deux divisions homographiques, dont n est un point double, car nq est un rayon commun. De plus, il suit de ce qui précède que c est le point de la première division qui correspond à l'infini de la seconde ; de même, β est le point de la seconde division qui correspond à l'infini de la première. Donc le deuxième point double sera o, en supposant $\beta o = nc = m\alpha$.

Ainsi la droite cherchée passe par o et est parallèle à βy.

Il est évident que les tangentes de la cubique gauche, parallèles au plan osculateur (mp, nq) passent par les points où R coupe la parabole B. Ces points sont réels si o est sur βx, au dedans de la parabole, imaginaires si o tombe au dehors sur le prolongement de $x\beta$. Le point o est au dedans (au dehors) de la conique B, si m est sur $\alpha x'$ (sur αx) ; donc les points communs aux lignes R, B sont réels ou imaginaires, selon que mp touche la branche $\alpha h'$ ou la branche αh de la parabole A, ou bien encore, selon que nq touche la branche $\beta k'$ ou la branche βk de la parabole B (*).

Donc chacune des deux paraboles A et B est divisée par le point de la cubique gauche (α ou β) en deux branches ; selon qu'un osculateur touche l'une ou l'autre branche, la conique inscrite située dans ce plan est une hyperbole ou une ellipse.

(*) La droite βx est dans l'intérieur de la parabole B. La droite αx est parallèle à βx, comme on l'a déjà remarqué, et *de même sens*. Le point α divise la parabole A en deux parties indéfinies que l'auteur appelle *branches* : l'une, αh, est située du même côté que αx, l'autre du même côté que $\alpha x'$. Même explication pour βk et $\beta k'$. P.

19. Soit r le point où la droite $\alpha\beta$, qui est la *focale centrale* (13) de la cubique gauche donnée, rencontre mn et par conséquent le plan osculateur (mp, nq). La droite qui joint r au point s, commun aux droites ip, mq, est évidemment parallèle à mp; or cette même droite rs contient le point t de contact du plan osculateur (mp, nq) avec l'ellipse gauche. En effet, la conique inscrite qui est dans ce plan est déterminée par les tangentes mp, nq, pq, et par les points m, i. Donc, si nous considérons les trois tangentes comme côtés d'un triangle circonscrit (dont un sommet est à l'infini), pour trouver le point t de contact sur pq, il suffit de mener la parallèle à mp par le point commun aux droites mq, ip.

Observons encore que, m et i étant les points de contact de deux tangentes parallèles, le centre g de la conique inscrite sera le point milieu de mi.

Il suit, de ce qui précède, que $r\beta$ exprime la distance (mesurée parallèlement à la focale centrale $\alpha\beta$) du point t au plan b. Et on a

$$r\beta : \alpha\beta = \beta n : (\beta n + m\alpha).$$

Le rapport $\beta n : (\beta n + m\alpha)$ (et par conséquent son égal $r\beta : \alpha\beta$) est positif et plus petit que l'unité, seulement quand o est extérieur à la conique B; si o est un point intérieur, ce rapport est négatif ou plus grand que l'unité. Donc tous les plans osculateurs, dont les points de contact avec la cubique gauche sont compris entre les deux plans osculateurs parallèles, contiennent des ellipses inscrites; les autres plans osculateurs contiennent des hyperboles, c'est-à-dire :

L'ellipse gauche a deux plans osculateurs, parallèles entre eux, qui coupent la développable osculatrice suivant deux paraboles; tous les autres plans osculateurs *coupent cette surface suivant des ellipses ou des hyperboles. Les points de la cubique, auxquels correspondent des ellipses, sont situés entre les deux plans osculateurs parallèles; les points auxquels correspondent des hyperboles sont au dehors* (*).

20. La conique centrale (13) située dans un plan parallèle et équidistant aux plans a, b, est une hyperbole; son centre est γ, point milieu de $\alpha\beta$; ses asymptotes sont parallèles à αx et βy. Donc le plan $m\alpha\beta$ sépare complétement l'une de l'autre les deux branches de l'hyperbole centrale. Or le centre g de la conique inscrite, située dans le plan osculateur (mp, nq), c'est-à-dire le point milieu de mi, est, par rapport au point $m\alpha\beta$, du même côté que i; et d'ailleurs i est au deçà ou au delà de ce plan, selon que o est intérieur ou extérieur à la conique B; donc la conique inscrite est une ellipse ou une hyperbole, selon que son centre tombe dans l'une ou dans l'autre branche de l'hyperbole centrale. Donc :

Les centres de toutes les coniques (ellipses et hyperboles) inscrites dans la développable osculatrice de l'ellipse gauche sont sur une hyperbole dont le plan est parallèle et équidistant aux deux plans osculateurs parallèles, et les asymptotes sont parallèles aux diamètres des paraboles inscrites situées dans ces derniers plans. Une branche de l'hyperbole centrale contient les centres des ellipses inscrites; l'autre branche contient les centres des hyperboles (**).

21. Au moyen du faisceau des plans conjoints parallèles au plan central (faisceau central), les points de la

(*) *Annali di Matematica*, t. II, luglio-agosto 1859.

(**) *Annali di Matematica*, t. II, luglio-agosto 1859.

cubique gauche sont conjugués deux à deux en involution (n° 8); les points doubles sont les points α, β de contact des plans osculateurs parallèles. Deux points conjugués sont situés dans deux plans conjoints du faisceau central; la droite qui joint ces plans est génératrice de l'hyperboloïde I enveloppé par les cônes conjoints, dont les sommets sont sur la focale centrale. Deux plans osculateurs conjugués passent par deux points conjoints de cette focale; et leur intersection est une génératrice de l'hyperboloïde J, lieu de toutes les coniques conjointes du faisceau central.

On sait qu'une tangente quelconque de la cubique gauche est rencontrée par les plans osculateurs en une série de points projective au système de ces plans; donc les couples des plans osculateurs conjugués, nommés ci-dessus, détermineront sur αx et βy deux involutions. Dans chacune de ces involutions, un point double est à l'infini; l'autre point double est α pour la première involution, β pour la seconde. Donc chacune de ces involutions n'est qu'une simple symétrie; c'est-à-dire, si deux plans osculateurs conjoints rencontrent αx en m, m' et βy en i, i', on aura

$$m\alpha = \alpha m', \quad i\beta = \beta i'.$$

D'ailleurs nous avons vu (n° 19) que les centres g, g' des coniques inscrites, situées dans ces plans osculateurs, sont les milieux des droites mi, $m'i'$. Donc par une propriété très-connue du quadrilatère gauche, les points g, g' sont en ligne droite avec γ, milieu de $\alpha\beta$ et centre de la conique centrale. Donc :

Deux points de la conique centrale, en ligne droite avec son centre, sont les centres de deux coniques inscrites, situées dans deux plans osculateurs conjugués, *qui rencontrent de nouveau la conique centrale en un même point.*

22. Si la cubique gauche a une seule asymptote réelle, la conique centrale est une hyperbole dont les branches sont séparées par le plan $m\alpha\beta$. Ce plan divise en deux parties la parabole B, mais il laisse la parabole A tout entière d'un même côté. Or la conique inscrite située dans le plan (mp, nq) est une ellipse ou une hyperbole, selon que i est sur βy ou sur $\beta y'$; de plus, le centre g de cette conique inscrite est le milieu de mi; donc la branche de l'hyperbole centrale qui contient les ellipses inscrites est du même côté que la courbe A par rapport au plan $m\alpha\beta$; l'autre branche est du côté opposé.

Les traces de deux plans osculateurs conjugués sur le plan de la conique B se rencontrent sur $\beta x'$; les traces des mêmes plans sur le plan de la parabole A se rencontrent sur $\alpha y'$. Donc l'intersection des deux plans osculateurs conjugués rencontrera la conique centrale en un point de la branche qui contient les centres des hyperboles inscrites. C'est-à-dire :

Dans l'ellipse gauche, chaque plan osculateur rencontre en deux points l'hyperbole centrale; ces deux points appartiennent à une même branche ou aux deux branches de cette courbe, suivant que la conique inscrite, située dans le plan nommé, est hyperbole ou ellipse.

Par conséquent, *chaque point de la branche qui contient les centres des hyperboles inscrites est l'intersection de trois plans osculateurs réels de la courbe gauche; au contraire, par chaque point de l'autre branche passe un seul plan osculateur réel.*

En outre, si nous considérons l'hyperboloïde J, lieu des coniques conjointes du faisceau central, par chaque point de la branche de l'hyperbole centrale qui contient les centres des hyperboles inscrites, passe une génératrice qui est l'intersection de deux plans oculateurs (conjugués) réels, dont l'un contient une ellipse inscrite et l'autre une hyperbole. Et par chaque point de la seconde branche passe une génératrice qui est l'intersection idéale de deux plans osculateurs imaginaires.

On voit aisément que dans l'hyperbole gauche tout point de l'ellipse centrale est l'intersection de trois plans osculateurs réels, et dans l'hyperbole parabolique gauche tout point de la parabole centrale est l'intersection de deux plans osculateurs réels, sans compter le plan de cette conique qui est lui-même osculateur à la courbe gauche.

23. Soient maintenant A une ellipse et B une hyperbole, inscrites, situées dans les plans osculateurs a, b d'une ellipse gauche. Soient α', β' les points de contact des coniques A, B avec la droite intersection de leurs plans; menons par β' la tangente $\beta'\alpha$ à l'ellipse A, et par α' la tangente $\alpha'\beta$ à l'hyperbole B. Si α, β sont les points de contact, ils sont aussi les points où la cubique gauche est osculée par les plans donnés. Soient α'', β'' les points où la droite (ab) est coupée par la tangente de B parallèle à $\alpha'\beta$, et par la tangente de A parallèle à $\beta'\alpha$.

Je me propose de construire les traces, sur a et b, des plans osculateurs parallèles. Si autour du centre c de l'ellipse A on fait tourner un diamètre, les tangentes à ses extrémités déterminent sur (ab) des couples de points m, m' conjugués en involution. Si on fait tourner une droite aussi autour du centre o de l'hyperbole B, on obtiendra sur (ab) une autre involution.

La première involution n'a pas de points doubles réels;

α' est le point central; β', β'' sont deux points conjugués, et par conséquent l'on a

$$\alpha' m . \alpha' m' = \alpha' \beta' . \alpha' \beta''.$$

La deuxième involution a les points doubles réels, déterminés par les asymptotes de B; β' est le point central; α', α'' sont deux points conjugués; et si m, m'' est un couple quelconque de points conjugués, on aura

$$\beta' m . \beta' m'' = \beta' \alpha' . \beta' \alpha''.$$

A chaque point m de (ab) correspond un point m' dans la première involution et un autre point m'' dans la seconde; mais si on choisit m de manière que m'' coïncide avec m', par m, m' passeront deux tangentes parallèles de l'ellipse A et deux tangentes parallèles de l'hyperbole B, ce qui donnera les traces des plans osculateurs parallèles.

Or on sait que deux involutions sur une même droite, dont l'une au moins a les points doubles imaginaires, ont toujours un couple commun de points conjugués réels. En effet, si m'' coïncide avec m', les équations ci-dessus donnent, par l'élimination de m',

$$\overline{\alpha' m}^2 - \alpha' m (\alpha' \alpha'' + \alpha' \beta'') + \alpha' \beta' . \alpha' \beta'' = 0,$$

équation quadratique dont les racines sont réelles, car le produit $\alpha'\beta'$, $\alpha'\beta''$ est évidemment négatif. On en conclut encore que le milieu des points cherchés est le milieu i de $\alpha''\beta''$. Il est maintenant bien facile de construire les points inconnus. Par un point g pris arbitrairement [au dehors de (ab)] on fera passer une circonférence de cercle qui ait pour corde $\beta'\beta''$; cette circonférence et la droite $g\alpha'$ se couperont en un point h. Par g, h on décrira une circonférence dont le centre soit sur la perpendiculaire élevée de i sur (ab); cette deuxième circonférence marquera sur (ab) les points cherchés.

Indépendamment de ces points, on peut construire les traces du plan central, ce qui donne aussi la *direction* des plans osculateurs parallèles. Le plan central passe évidemment par les centres c, o des coniques données; donc ses traces seront ic, io.

Si une développable de la troisième classe est donnée par deux hyperboles inscrites, la construction indiquée ci-dessus établira si l'arête de rebroussement est une ellipse gauche, ou une hyperbole gauche, ou une hyperbole parabolique gauche. Les points conjugués communs aux deux involutions sont réels dans le premier cas, imaginaires dans le second, réels coïncidents dans le troisième.

24. Enfin je me propose de déterminer l'espèce des coniques, perspectives de la cubique gauche sur le plan central. Soit S un cône du second degré, perspectif à la courbe gauche, a' son sommet, O' le plan mené par a' parallèlement au plan central (c'est-à-dire par la *directrice* du plan à l'infini); O le plan conjoint au plan O'. En conservant toutes les autres dénominations des nos 6 et 7, l'intersection du cône S par le point O est une conique passant par les points β', γ' de la directrice (à l'infini); or ces points β', γ' sont imaginaires ou réels selon que le plan O coupe la courbe gauche en un seul point réel a ou en trois points réels a, b, c; d'ailleurs l'intersection du cône S par le point O est de la même espèce que l'intersection par le point central, car ces plans sont parallèles. Donc:

Toutes les coniques perspectives de la cubique gauche sur le plan central sont de la même espèce; c'est-à-dire elles sont des hyperboles, des ellipses ou des paraboles selon que la cubique est une hyperbole gauche, ou une ellipse gauche, ou une hyperbole parabolique gauche (*).

(*) *Annali di Matematica*, t. II, luglio-agosto 1859.

Observons que, pour l'hyperbole parabolique gauche, parmi les cônes perspectifs du second ordre, il y a deux cylindres; l'un d'eux est hyperbolique et correspond au point où la courbe est touchée par le plan à l'infini; l'autre est parabolique et correspond au point où le plan à l'infini est simplement sécant. Le plan central est asymptotique au premier cylindre.

Bologne, le 21 avril 1861.

Additions (27 octobre 1862).

M. de Jonquières, dans une Lettre très-obligeante que je viens de recevoir de Vera-Cruz, me fait observer que M. Chasles a prouvé le premier (*Aperçu historique*, p. 834) que deux figures homographiques situées dans un même plan ont trois points doubles, ce qui revient à dire que le lieu du point commun à deux rayons homologues, dans deux faisceaux homographiques de rayons dans l'espace, est une courbe gauche du troisième ordre. J'avais attribué par méprise ce théorème à M. Seydewitz.

Au n° **2**, e est le point commun aux droites bc, ad, et f est l'intersection de ac, bd.

Aux n^os **7** et **11**, chacun des points x, y forme, avec les trois points α, β, γ, un système *équianharmonique* (*); donc x, y sont imaginaires (conjugués), si α, β, γ sont tous réels; mais lorsque α seul est réel, et β, γ imaginaires (conjugués), x, y sont réels. De là on conclut immédiatement le théorème du n° **12**, sans avoir recours à la théorie des courbes planes de quatrième ordre et de troisième classe.

(*) *Voir mon Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane*, n° 26. Bologna, 1862.