Théorie des points multiples et des tangentes ; d'après Salmon

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 41-45

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__41_1>

THÉORIE DES POINTS MULTIPLES ET DES TANGENTES;

D'APRÈS SALMON.

1. Soit

$$A + Bx + Cy + Dx^2 + Exy + Fy^2 + \ldots = 0$$

l'équation en coordonnées cartésiennes d'une courbe.

Si l'on a $A = 0$, la tangente à l'origine est alors

$$Bx + Cy = 0,$$

ou en coordonnées polaires

$$\rho\,(B\cos\theta + C\sin\theta) = 0.$$

Si l'on a encore $B = o$, l'axe des x est une tangente, et si $C = o$, l'axe des y est une tangente.

2. Si $A = B = C = o$, toute droite qui passe par l'origine rencontre la courbe en deux points qui *coïncident;* l'origine est alors un point double, et sous ce point de vue toutes ces lignes sont en quelque sorte des tangentes; mais parmi ces lignes il y en a deux qui touchent plus étroitement les courbes que toutes les autres : ce sont celles qui sont déterminées par l'équation polaire

$$\rho^2 (D\cos^2\theta + E\sin\theta\cos\theta + F\sin^2\theta) = o;$$

alors l'équation polaire devient divisible pour ρ^3; trois valeurs de ρ deviennent nulles : ce sont ces deux lignes qui portent exclusivement le nom de *tangentes*. Le système de ces deux lignes est représenté par l'équation

$$Dx^2 + Gxy + Fy^2 = o.$$

3. Si l'équation polaire de la courbe est

$$u_2 + u_3 + \ldots = o,$$

u_p, c'est ρ^p multipliée par une fonction trigonométrique de θ, $u_2 = o$ est l'équation du système des doubles tangentes.

Il y a trois cas à distinguer :

1° Les deux tangentes sont *réelles*. Alors l'origine est un point d'intersection de deux branches de la courbe, chaque branche ayant sa tangente particulière. On en a un exemple simple dans les courbes formées du système de deux autres courbes; soient

$$P = o, \quad Q = o$$

deux courbes de degrés p et q et $p + q = n$; alors

$$U = PQ = o$$

est une courbe de degré n; les courbes P et Q se coupent en pq points, et en chacun de ces points il y a évidemment deux tangentes, l'une à la courbe P et l'autre à la courbe Q.

2° u_2 est un carré parfait; les deux tangentes réelles coïncident en une seule droite double. Le point porte alors le nom de *point de rebroussement*, et quelquefois, d'après une considération cinématique, *point stationnaire*. Si la courbe est décrite par un point, lorsque, ayant parcouru une des branches, il arrive au point de contact de la tangente double, il semble s'arrêter pour changer subitement le *sens* du mouvement dans le sens opposé. La tangente double touche en *trois points* consécutifs.

L'exemple rapporté ci-dessus ne peut pas servir ici; supposons que les deux courbes

$$P = 0, \quad Q = 0$$

se touchent; alors il y a en ce point une seule tangente, mais elle rencontre la courbe de ce degré n en *quatre points* consécutifs, deux sur la courbe P et deux sur la courbe Q. Ainsi quoiqu'il y ait une tangente double, ce n'est pas là un point de rebroussement; l'équation polaire a alors la forme

$$u_1^2 + u_1 v_2 + u_4 + \ldots = 0,$$

$u_1 = 0$ réduit l'équation à

$$u_4 + \ldots = 0.$$

3° Les deux tangentes sont *imaginaires*, alors il n'existe aucun point consécutif à l'origine qui est ainsi un point *isolé*, mais *conjugué* à la courbe; toutes les droites qui passent par ce point sont des espèces de tangentes qui coupent la courbe en $n - 2$ points, si n est le degré de la courbe.

4. *Exemple.* — Soit la cubique donnée par l'équation

$$y^2 = (x - a)(x - b)(x - c); \quad c > b > a;$$

la courbe est symétrique par rapport à l'axe des x. Soient A, B, C les trois points de l'axe des x correspondants à

$$x = a, \quad x = b, \quad x = c,$$

la courbe est formée d'un ovale passant par A et B et d'une branche de forme parabolique, ayant pour sommet C; entre B et C il n'existe aucun point.

Si $b = c$, le point B coïncide avec C; l'ovale et la branche forment une seule ligne, et en C il existe deux tangentes réelles.

Si $a = b$, alors A et B coïncident; l'ovale se réduit en un point *conjugué*, et les droites qui passent par ce point ne peuvent rencontrer la branche infinie qu'en un seul point.

Si $a = b = c$, les trois points A, B, C coïncident; il n'y existe qu'une seule tangente simultanément aux deux branches infinies. A est un point de rebroussement.

5. Si $a = b = c = 0$, l'origine devient un point *triple*, chaque droite qui y passe rencontre là la courbe en trois points consécutifs, et ne peut plus la couper qu'en $n - 3$ points, il y existe *trois tangentes* données par l'équation

$$u_3 = 0,$$

ce qui donne lieu à quatre espèces de points triples :

1° Les trois tangentes réelles et distinctes;

2° Une réelle et deux coïncidentes ;

3° Les trois coïncidentes ;

4° Une réelle et deux imaginaires.

Ce dernier cas est remarquable, car, à l'œil, ce point triple ne se distingue en rien des autres points de la courbe ; il n'y a, pour ainsi dire, que l'œil analytique qui aperçoit une différence.

6. Si l'équation polaire est de la forme

$$u_k + u_{k+1} + \ldots = 0,$$

ou suppose que tous les termes qui précèdent u_k sont nuls ; alors l'origine est un point de multiplicité k ; il y a là k points coïncidents, et les trois qui y passent ne peuvent rencontrer la courbe qu'en $n - k$ points ; il y existe k tangentes, ayant $k + 1$ points en commun avec la courbe, et ne pouvant rencontrer la courbe qu'en $n - k - 1$ points.