NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PAINVIN

Mémoire sur les tétraèdres. Détermination du volume maximum d'un tétraèdre dont les faces ont des aires données

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 414-436

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__414_0>

MÉMOIRE SUR LES TÉTRAÈDRES.

Détermination du volume maximum d'un tétraèdre dont les faces ont des aires données

(voir p. 353);

PAR M. PAINVIN.

Présenté à l'Académie en janvier 1862.

30. Du groupe (III) on déduit, eu égard aux relations (7),

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} &\lambda^2 = r_1^2 r_2^2 r_3^2 - \sqrt{\theta}(\theta + c),\\ &\lambda = r_1\rho_1 d_1 = r_2\rho_2 d_2 = r_3\rho_3 d_3,\end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire :

THÉORÈME VIII. — *Le produit de deux arêtes opposées par leur plus courte distance est constant et égal à six fois le volume.*

Le groupe (V) nous donne enfin :

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} &f_2 + f_3 + 2\theta - 2r_1^2\sqrt{\theta} = \frac{\lambda^2}{d_1^2} = r_1^2\rho_1^2,\\ &f_3 + f_1 + 2\theta - 2r_2^2\sqrt{\theta} = \frac{\lambda^2}{d_2^2} = r_2^2\rho_2^2,\\ &f_1 + f_2 + 2\theta - 2r_3^2\sqrt{\theta} = \frac{\lambda^2}{d_3^2} = r_3^2\rho_3^2,\end{aligned}\right.$$

d'où l'on conclut, en vertu de l'équation (3),

$$(15)\qquad r_1^2\rho_1^2 + r_2^2\rho_2^2 + r_3^2\rho_3^2 = f + f_1 + f_2 + f_3,$$

c'est-à-dire :

Théorème IX. — *La somme des carrés des produits des arêtes opposées est égale à quatre fois la somme des carrés des aires des faces.*

31. En combinant les relations du groupe (VIII) et en faisant intervenir les égalités (4), (8) et (9), on arrive à :

$$
(16)\qquad \left\{
\begin{aligned}
2\rho_1^2(\mathrm{R}^2-\mathrm{R}_1^2) &= f_1 - f,\\
2\rho_2^2(\mathrm{R}^2-\mathrm{R}_2^2) &= f_2 - f,\\
2\rho_3^2(\mathrm{R}^2-\mathrm{R}_3^2) &= f_3 - f,\\
2r_1^2(\mathrm{R}_2^2-\mathrm{R}_3^2) &= f_3 - f_2,\\
2r_2^2(\mathrm{R}_3^2-\mathrm{R}_1^2) &= f_1 - f_3,\\
2r_3^2(\mathrm{R}_1^2-\mathrm{R}_2^2) &= f_2 - f_1,
\end{aligned}
\right.
$$

d'où :

Théorème X. — *Le produit du carré d'une arête par la différence des carrés des distances du centre de gravité aux sommets opposés à cette arête est égal au double de la différence des carrés des faces adjacentes à cette arête.*

Combinant les relations (16) et (9), on trouve encore :

$$
(17)\quad \left\{
\begin{aligned}
&2(\mathrm{R}_2^2-\mathrm{R}_3^2) = r_2^2 - r_3^2, \quad 2(\mathrm{R}^2-\mathrm{R}_1^2) = r_2^2-\rho_3^2 = r_3^2-\rho_2^2,\\
&2\ \mathrm{R}_3^2-\mathrm{R}_1^2) = r_3^2 - r_1^2, \quad 2(\mathrm{R}^2-\mathrm{R}_2^2) = r_3^2-\rho_1^2 = r_1^2-\rho_3^2,\\
&2\ \mathrm{R}_1^2-\mathrm{R}_2^2) = r_1^2 - r_2^2, \quad 2(\mathrm{R}^2-\mathrm{R}_3^2) = r_1^2-\rho_3^2 = r_2^2-\rho_1^2,
\end{aligned}
\right.
$$

égalités qu'il est facile de traduire en langage ordinaire.

32. Les angles $\widehat{\mathrm{A}_i \mathrm{A}_k}$ sont les suppléments des dièdres formés par les faces du tétraèdre auxquelles les droites A_i et A_k sont normales.

Or la comparaison des formules (3) et (6) nous donne immédiatement :

$$(18)\left\{\begin{aligned} -\cos(A_2A_3) &= \frac{1}{\operatorname{tang}(r_1r_2)\operatorname{tang}(r_1\rho_2)} = \frac{1}{\operatorname{tang}(r_1r_3)\operatorname{tang}(r_1\rho_3)},\\ -\cos(A_1A_3) &= \frac{1}{\operatorname{tang}(r_2r_3)\operatorname{tang}(r_2\rho_3)} = \frac{1}{\operatorname{tang}(r_2r_1)\operatorname{tang}(r_2\rho_1)},\\ -\cos(A_1A_2) &= \frac{1}{\operatorname{tang}(r_3r_1)\operatorname{tang}(r_3\rho_1)} = \frac{1}{\operatorname{tang}(r_3r_2)\operatorname{tang}(r_3\rho_2)}. \end{aligned}\right.$$

De plus, les formules (17) du § II et les valeurs (3) de ce paragraphe nous fourniront les $\widehat{AA_k}$ sous la forme suivante:

$$(19)\left\{\begin{aligned} -\sqrt{ff_1}\cos(AA_1) &= (r_2^2-\sqrt{\theta})(r_3^2-\sqrt{\theta}),\\ -\sqrt{ff_2}\cos(AA_2) &= (r_3^2-\sqrt{\theta})(r_1^2-\sqrt{\theta}),\\ -\sqrt{ff_3}\cos(AA_3) &= (r_1^2-\sqrt{\theta})(r_2^2-\sqrt{\theta}), \end{aligned}\right.$$

d'où on conclut, en ayant égard aux valeurs (6),

$$(20)\left\{\begin{aligned} -\cos(AA_1) &= \frac{1}{\operatorname{tang}(\rho_1r_2)\operatorname{tang}(\rho_1\rho_2)} = \frac{1}{\operatorname{tang}(\rho_1r_3)\operatorname{tang}(\rho_1\rho_3)},\\ -\cos(AA_2) &= \frac{1}{\operatorname{tang}(\rho_2r_3)\operatorname{tang}(\rho_2\rho_3)} = \frac{1}{\operatorname{tang}(\rho_2r_1)\operatorname{tang}(\rho_2\rho_1)},\\ -\cos(AA_3) &= \frac{1}{\operatorname{tang}(\rho_3r_1)\operatorname{tang}(\rho_3\rho_1)} = \frac{1}{\operatorname{tang}(\rho_3r_2)\operatorname{tang}(\rho_3\rho_2)}. \end{aligned}\right.$$

Les relations (18) et (20) donnent encore lieu à plusieurs énoncés géométriques.

A l'aide des valeurs (3), (13) et (19), on arrive immédiatement aux relations suivantes :

$$(21)\left\{\begin{aligned} \left\{\begin{matrix}\cos(AA_1)\cos(A_2A_3)\\ \cos(AA_2)\cos(A_3A_1)\\ \cos(AA_3)\cos(A_1A_2)\end{matrix}\right\} &= \frac{\sqrt{\theta}(r_1^2-\sqrt{\theta})(r_2^2-\sqrt{\theta})(r_3^2-\sqrt{\theta})}{\sqrt{ff_1f_2f_3}}\\ &= \frac{\sqrt{\theta}(\lambda^2-f\sqrt{\theta})}{\sqrt{ff_1f_2f_3}}, \end{aligned}\right.$$

propriété remarquable énoncée par le théorème suivant :

THÉORÈME XI. — *Le produit des cosinus des dièdres opposés est constant.*

Les formules (21) et (3) nous conduisent encore à une propriété des dièdres adjacents à une même face ; car on trouve :

$$(22)\quad \left\{\begin{array}{ll} \text{Sommet O}\ldots & \left|\begin{array}{c} \dfrac{\cos(A_1A_2)\cos(A_1A_3)}{\cos(AA_1)} \\ \dfrac{\cos(A_2A_3)\cos(A_2A_1)}{\cos(AA_2)} \\ \dfrac{\cos(A_3A_1)\cos(A_3A_2)}{\cos(AA_3)} \end{array}\right\} = \dfrac{\theta\sqrt{f}}{\sqrt{f_1 f_2 f_3}}, \\ \\ \text{Sommet M}_1\ldots & \left|\begin{array}{c} \dfrac{\cos(AA_2)\cos(AA_3)}{\cos(AA_1)} \\ \dfrac{\cos(A_2A_3)\cos(A_2A)}{\cos(A_2A_1)} \\ \dfrac{\cos(A_3A)\cos(A_3A_2)}{\cos(A_3A_1)} \end{array}\right\} = \dfrac{(r_1^2-\sqrt{\theta})^2\sqrt{f_1}}{\sqrt{f f_2 f_3}}. \end{array}\right.$$

. . . .

Je crois inutile de transcrire les relations similaires correspondant aux sommets M_2, M_3 ; elles s'obtiendront d'ailleurs par une simple permutation d'indices.

Le groupe (II *bis*) nous donne des relations entre les dièdres d'un même sommet.

33. Je n'ai cité que les plus saillantes parmi les propriétés que présente le tétraèdre maximum ; mais les formules que je viens de relater offrent un grand nombre de combinaisons pouvant conduire à des relations plus ou moins simples entre les éléments de ce tétraèdre.

Cependant, avant de terminer ce Mémoire, je dirai quelques mots d'un tétraèdre dérivant du tétraèdre

$OM_1M_2M_3$ par une construction que j'exposerai tout à l'heure ; ce tétraèdre, qui, je crois, n'a pas été considéré jusqu'ici, présente des relations fort curieuses avec le tétraèdre primitif ; il me semble donc intéressant d'entrer dans quelques détails sur ce sujet, et d'y consacrer un dernier paragraphe.

§ V. — *Propriétés du* TÉTRAEDRE DÉRIVÉ. *Autre problème de maximum.*

34. Par un point quelconque de l'espace (je choisirai le point O pour plus de clarté) élevons des perpendiculaires A_1, A_2, A_3 aux faces OM_2M_3, OM_1M_3, OM_1M_2, du côté du sommet opposé à chaque face ; puis une perpendiculaire A à la face $M_1M_2M_3$ qu'on prolongera du côté opposé à cette face ; prenons ensuite sur chacune de ces perpendiculaires, à partir du point O, des longueurs proportionnelles au double de l'aire de la face qui lui est normale. Ainsi nous prendrons

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} Om &= \frac{2s}{\mu} = \frac{\sqrt{f}}{\mu}, && \text{suivant A},\\ Om_1 &= \frac{2s_1}{\mu} = \frac{\sqrt{f_1}}{\mu}, && \text{suivant } A_1,\\ Om_2 &= \frac{2s_2}{\mu} = \frac{\sqrt{f_2}}{\mu}, && \text{suivant } A_2,\\ Om_3 &= \frac{2s_3}{\mu} = \frac{\sqrt{f_3}}{\mu}, && \text{suivant } A_3,\end{aligned}\right.$$

nous formerons ainsi un tétraèdre $mm_1m_2m_3$ que j'appellerai le *tétraèdre dérivé des aires* du tétraèdre primitif.

Calculons d'abord les coordonnées des sommets du tétraèdre que nous venons de définir.

35. Soient ξ_i, η_i, ζ_i les coordonnées du sommet m_i ($i = 1, 2, 3$). On a d'abord

$$\xi_i = \mathrm{O}m_i \cos(\mathrm{A}_i x) = \frac{\sqrt{f_i}}{\mu} \cos(\mathrm{A}_i x).$$

Or, d'après les formules (12) du § II, nous avons

$$\mathrm{X}_i = \sqrt{f_i} \cos(\mathrm{A}_i x);$$

les coordonnées des trois sommets m_1, m_2, m_3 seront donc

$$(2) \qquad \begin{cases} \xi_i = \dfrac{\mathrm{X}_i}{\mu}, \\ \eta_i = \dfrac{\mathrm{Y}_i}{\mu}, \\ \zeta_i = \dfrac{\mathrm{Z}_i}{\mu}. \end{cases}$$

Pour le sommet m, on a (ξ, η, ζ étant ses coordonnées)

$$\xi = \mathrm{O}m \cos(\mathrm{A}x) = \frac{\sqrt{f}}{\mu} \cos(\mathrm{A}x);$$

les formules (15) du § II nous donnent d'ailleurs

$$-(\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2 + \mathrm{X}_3) = \sqrt{f} \cos(\mathrm{A}x);$$

par suite, si l'on pose

$$(3) \qquad \begin{cases} \mathrm{X} = -(\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2 + \mathrm{X}_3), \\ \mathrm{Y} = -(\mathrm{Y}_1 + \mathrm{Y}_2 + \mathrm{Y}_3), \\ \mathrm{Z} = -(\mathrm{Z}_1 + \mathrm{Z}_2 + \mathrm{Z}_3). \end{cases}$$

on trouve

$$(4)\qquad \begin{cases} \xi = \dfrac{X}{\mu}, \\ \eta = \dfrac{Y}{\mu}, \\ \zeta = \dfrac{Z}{\mu}. \end{cases}$$

Je remarque qu'il résulte immédiatement des formules (2), (3), (4) que *le centre de gravité de ce tétraèdre est au point* O *par lequel on mène les normales.*

36. Représentons par λ' le sextuple du volume du tétraèdre $mm_1m_2m_3$, on a :

$$(5)\quad \lambda' = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{X}{\mu} & \dfrac{Y}{\mu} & \dfrac{Z}{\mu} \\ 1 & \dfrac{X_1}{\mu} & \dfrac{Y_1}{\mu} & \dfrac{Z_1}{\mu} \\ 1 & \dfrac{X_2}{\mu} & \dfrac{Y_2}{\mu} & \dfrac{Z_2}{\mu} \\ 1 & \dfrac{X_3}{\mu} & \dfrac{Y_3}{\mu} & \dfrac{Z_3}{\mu} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \dfrac{X_1}{\mu} & \dfrac{Y_1}{\mu} & \dfrac{Z_1}{\mu} \\ 1 & \dfrac{X_2}{\mu} & \dfrac{Y_2}{\mu} & \dfrac{Z_2}{\mu} \\ 1 & \dfrac{X_3}{\mu} & \dfrac{Y_3}{\mu} & \dfrac{Z_3}{\mu} \end{vmatrix} = \frac{4}{\mu^3}L = \frac{4}{\mu^3}\lambda^2.$$

Ainsi :

THÉORÈME I. — *Le volume du tétraèdre dérivé est égal, à un facteur numérique près, au carré du volume du tétraèdre primitif.*

Remarque. — Nous avons introduit la ligne μ afin de laisser les formules homogènes. Dans les énoncés suivants, nous supposerons toujours, sauf avis contraire, cette constante égale à l'unité.

« Si l'on suppose, en particulier,

$$\mu = \sqrt[3]{\lambda}, \quad \text{ou} \quad \mu = \sqrt[3]{\lambda^2},$$

» on trouve que :

» Dans le premier cas, le volume du tétraèdre dérivé » est égal à quatre fois le volume du tétraèdre primitif;

» Dans le second cas, le volume du tétraèdre dérivé » est toujours égal à $\frac{2}{3}$. »

37. Nous poserons, pour faciliter les calculs,

$$
(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sqrt{ff_i}\cos(\mathrm{AA}_i) = \mathrm{A}_{oi},\\ &\sqrt{f_if_k}\cos(\mathrm{A}_i\mathrm{A}_k) = \mathrm{A}_{ik},\end{aligned}\right.
$$

et les formules (17) du § II deviennent avec cette notation

$$
(7)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{A}_{01}+\mathrm{A}_{21}+\mathrm{A}_{31}+f_1 = 0,\\ &\mathrm{A}_{02}+\mathrm{A}_{12}+\mathrm{A}_{32}+f_2 = 0,\\ &\mathrm{A}_{03}+\mathrm{A}_{13}+\mathrm{A}_{23}+f_3 = 0,\\ &\mathrm{A}_{01}+\mathrm{A}_{02}+\mathrm{A}_{03}+f = 0,\\ &\mathrm{A}_{12}+\mathrm{A}_{13}+\mathrm{A}_{23} = \frac{f-f_1-f_2-f_3}{2} = -c.\end{aligned}\right.
$$

Déterminons les arêtes du tétraèdre dérivé; posant

$$
(8)\qquad \left\{\begin{aligned} &\alpha_{oi} = \overline{mm_i}^2,\\ &\alpha_{ik} = \overline{m_im_k}^2;\end{aligned}\right.
$$

on trouve, en ayant égard aux valeurs (2), (3), (4), (6) et aux formules (14) du § II :

$$
(9)\qquad \left\{\begin{aligned} \mu^2\alpha_{01} &= (2\mathrm{X}_1+\mathrm{X}_2+\mathrm{X}_3)^2+(2\mathrm{Y}_1+\mathrm{Y}_2+\mathrm{Y}_3)+(2\mathrm{Z}_1+\mathrm{Z}_2+\mathrm{Z}_3)^2\\ &= 2(f+f_1)-(f_2+f_3)-2\mathrm{A}_{23},\\ \mu^2\alpha_{02} &= (\mathrm{X}_1+2\mathrm{X}_3+\mathrm{X}_3)^2+(\mathrm{Y}_1+2\mathrm{Y}_2+\mathrm{Y}_3)+(\mathrm{Z}_1+2\mathrm{Z}_2+\mathrm{Z}_3)^2\\ &= 2(f+f_2)-(f_3+f_1)-2\mathrm{A}_{13},\\ \mu^2\alpha_{03} &= (\mathrm{X}_1+\mathrm{X}_2+2\mathrm{X}_3)^2+(\mathrm{Y}_1+\mathrm{Y}_2+2\mathrm{Y}_3)^2+(\mathrm{Z}_1+\mathrm{Z}_2+2\mathrm{Z}_3)^2\\ &= 2(f+f_3)-(f_1+f_2)-2\mathrm{A}_{12};\end{aligned}\right.
$$

$$(10)\left\{\begin{array}{l}\mu^2\alpha_{23}=(X_2-X_3)^2+(Y_2-Y_3)^2+(Z_2-Z_3)^2=f_2+f_3-2A_{23},\\ \mu^2\alpha_{13}=(X_3-X_1)^2+(Y_3-Y_1)^2+(Z_3-Z_1)^2=f_3+f_1-2A_{13},\\ \mu^2\alpha_{12}=(X_1-X_2)^2+(Y_1-Y_2)^2+(Z_1-Z_2)^2=f_1+f_2-2A_{12}.\end{array}\right.$$

De ces relations on conclut

$$(11)\left\{\begin{array}{l}\alpha_{01}-\alpha_{23}=\frac{2}{\mu^2}(f+f_1-f_2-f_3),\\ \alpha_{02}-\alpha_{13}=\frac{2}{\mu^2}(f+f_2-f_1-f_3),\\ \alpha_{03}-\alpha_{12}=\frac{2}{\mu^2}(f+f_3-f_1-f_2),\end{array}\right.$$

puis

$$(12)\left\{\begin{array}{l}\alpha_{12}+\alpha_{13}+\alpha_{23}=\frac{1}{\mu^2}[3(f_1+f_2+f_3)-f],\\ \alpha_{02}+\alpha_{03}+\alpha_{23}=\frac{1}{\mu^2}[3(f+f_2+f_3)-f_1],\\ \alpha_{03}+\alpha_{01}+\alpha_{13}=\frac{1}{\mu^2}[3(f+f_1+f_3)-f_2],\\ \alpha_{01}+\alpha_{02}+\alpha_{12}=\frac{1}{\mu^2}[3(f+f_1+f_2)-f_3],\\ \alpha_{01}+\alpha_{02}+\alpha_{03}+\alpha_{12}+\alpha_{13}+\alpha_{23}=\frac{4}{\mu^2}(f+f_1+f_2+f_3),\end{array}\right.$$

et enfin

$$(13)\left\{\begin{array}{l}\alpha_{01}+\alpha_{02}+\alpha_{03}=\frac{1}{\mu^2}(f+f_1+f_2+f_3+4f),\\ \alpha_{10}+\alpha_{12}+\alpha_{13}=\frac{1}{\mu^2}(f+f_1+f_2+f_3+4f_1),\\ \alpha_{20}+\alpha_{21}+\alpha_{23}=\frac{1}{\mu^2}(f+f_1+f_2+f_3+4f_2),\\ \alpha_{30}+\alpha_{31}+\alpha_{32}=\frac{1}{\mu^2}(f+f_1+f_2+f_3+4f_3),\end{array}\right.$$

relations que nous traduirons par les énoncés suivants :

THÉORÈME II. — *La différence des carrés des arêtes opposées est égale à quatre fois l'excès de la somme des carrés des faces primitives respectivement perpendiculaires aux rayons vecteurs qui aboutissent aux extrémités de la première arête sur celle des aires correspondant à la seconde arête.*

THÉORÈME III. — *La somme des carrés des arêtes d'une même face est égale à douze fois la somme des carrés des faces primitives perpendiculaires aux rayons vecteurs de la face, moins quatre fois le carré de la face restante.*

THÉORÈME IV. — *La somme des carrés des arêtes correspondant à un même sommet est égale à quatre fois la somme des carrés des aires primitives, plus seize fois le carré de la face homologue de celle qui est opposée au sommet considéré.*

N. B. — J'appellerai *faces homologues* les faces $m_1m_2m_3$ et $M_1M_2M_3$, mm_1m_2 et OM_1M_2, mm_1m_3 et OM_1M_3, mm_2m_3 et OM_2m_3.

Je désignerai sous le nom de *faces conjuguées de l'arête* m_im_k ou α_{ik} les faces $\sqrt{f_i}$, $\sqrt{f_k}$.

38. Déterminons les aires des faces du tétraèdre dérivé.

Nous représenterons par

$\mathcal{A}$ l'axe, et σ l'aire de la face $m_1m_2m_3$,
$\mathcal{A}_1$ l'axe, et σ_1 l'aire de la face mm_2m_3,
$\mathcal{A}_2$ l'axe, et σ_2 l'aire de la face mm_1m_3,
$\mathcal{A}_3$ l'axe, et σ_3 l'aire de la face mm_1m_2.

Afin de bien préciser les signes, nous devrons rapporter les déterminants partiels au déterminant λ' qui donne le volume, savoir

$$(14)\qquad \lambda' = \begin{vmatrix} 1 & \frac{X}{\mu} & \frac{Y}{\mu} & \frac{Z}{\mu} \\ 1 & \frac{X_1}{\mu} & \frac{Y_1}{\mu} & \frac{Z_1}{\mu} \\ 1 & \frac{X_2}{\mu} & \frac{Y_2}{\mu} & \frac{Z_2}{\mu} \\ 1 & \frac{X_3}{\mu} & \frac{Y_3}{\mu} & \frac{Z_3}{\mu} \end{vmatrix}$$

Les équations des faces $m_1 m_2 m_3$, $m m_2 m_3$, $m m_1 m_3$, $m m_1 m_2$ s'obtiendront en remplaçant, dans le déterminant λ', les coordonnées du sommet manquant par les coordonnées courantes x, y, z.

Nous devrons alors appliquer les formules (15) du § II; je vais les rappeler.

Si $P = 0$ est l'équation du plan d'une face s, la direction de la normale au plan, prolongée du côté opposé à cette face, est donnée par les équations

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} 2s\cos(Ax) &= \frac{dP}{dx}, \\ 2s\cos(Ay) &= \frac{dP}{dy}, \\ 2s\cos(Az) &= \frac{dP}{dz}. \end{aligned}\right.$$

39. Ceci posé, considérons la face $m_1 m_2 m_3$; son plan a pour équation

$$P = \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & \frac{X_1}{\mu} & \frac{Y_1}{\mu} & \frac{Z_1}{\mu} \\ 1 & \frac{X_2}{\mu} & \frac{Y_2}{\mu} & \frac{Z_2}{\mu} \\ 1 & \frac{X_3}{\mu} & \frac{Y_3}{\mu} & \frac{Z_3}{\mu} \end{vmatrix} = 0$$

Nous aurons donc pour la direction de l'axe $\mathcal{A}$:

$$2\sigma \cos(\mathcal{A}\, x) = \frac{dP}{dx} = -\frac{1}{\mu^2}\begin{vmatrix} 1 & Y_1 & Z_1 \\ 1 & Y_2 & Z_2 \\ 1 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}$$

ou

$$\mu^2 . 2\sigma \cos(\mathcal{A}\, x) = -\left(\frac{dL}{dX_1} + \frac{dL}{dY_1} + \frac{dL}{dZ_1}\right);$$

ou enfin, en ayant égard aux formules (4) du § II,

$$2\sigma \cos(\mathcal{A}\, x) = -\frac{\lambda}{\mu^2}(x_1 + x_2 + x_3);$$

nous arrivons ainsi à ce premier groupe

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} 2\sigma \cos(\mathcal{A}\, x) &= -\frac{\lambda}{\mu^2}(x_1 + x_2 + x_3), \\ 2\sigma \cos(\mathcal{A}\, y) &= -\frac{\lambda}{\mu^2}(y_1 + y_2 + y_3), \\ 2\sigma \cos(\mathcal{A}\, z) &= -\frac{\lambda}{\mu^2}(z_1 + z_2 + z_3), \end{aligned}\right.$$

les deux dernières relations s'obtenant par un calcul semblable.

Soit maintenant la face $m m_2 m_3$; son plan a pour équation

$$P_1 = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{X}{\mu} & \dfrac{Y}{\mu} & \dfrac{Z}{\mu} \\ 1 & x & y & z \\ 1 & \dfrac{X_2}{\mu} & \dfrac{Y_2}{\mu} & \dfrac{Z_2}{\mu} \\ 1 & \dfrac{X_3}{\mu} & \dfrac{Y_3}{\mu} & \dfrac{Z_3}{\mu} \end{vmatrix} = 0$$

Nous aurons, pour déterminer la direction de l'axe $\mathcal{A}_1$:

$$2\sigma_1 \cos(\mathcal{A}_1 x) = \frac{dP_1}{dx} = +\frac{1}{\mu^2}\begin{vmatrix} 1 & Y & Z \\ 1 & Y_2 & Z_2 \\ 1 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}$$

ou

$$\mu^2 . 2\sigma_1 \cos(\mathcal{A}_1 x) = \begin{vmatrix} 3 - Y_1 & -Z_1 \\ 1 \quad Y_2 & Z_2 \\ 1 \quad Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = \left(3\frac{dL}{dX_1} - \frac{dL}{dX_2} - \frac{dL}{dX_3}\right),$$

ou enfin

$$2\sigma_1 \cos(\mathcal{A}_1 x) = -\frac{\lambda}{\mu^2}(x_1 + x_2 + x_3 - 4x_1).$$

Le calcul des autres angles se fera d'une manière semblable et sans aucune ambiguïté; de sorte que nous pouvons écrire tout de suite

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} 2\sigma_i \cos(\mathcal{A}_i x) &= -\frac{\lambda}{\mu^2}(x_1 + x_2 + x_3 - 4x_i), \\ 2\sigma_i \cos(\mathcal{A}_i y) &= -\frac{\lambda}{\mu^2}(y_1 + y_2 + y_3 - 4y_i), \\ 2\sigma_i \cos(\mathcal{A}_i z) &= -\frac{\lambda}{\mu^2}(z_1 + z_2 + z_3 - 4z_i). \end{aligned} \right.$$

Si nous introduisons les coordonnées u, v, w du centre de gravité du tétraèdre primitif, savoir :

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} u &= \frac{x_1 + x_2 + x_3}{4}, \\ v &= \frac{y_1 + y_2 + y_3}{4}, \\ w &= \frac{z_1 + z_2 + z_3}{4}, \end{aligned} \right.$$

les formules (16) et (17) prendront la forme suivante :

$$
(19)\quad \left\{
\begin{aligned}
\sigma \cos(\mathcal{A}x) &= -\frac{2}{\mu^2}\lambda u,\\
\sigma \cos(\mathcal{A}y) &= -\frac{2}{\mu^2}\lambda v,\\
\sigma \cos(\mathcal{A}z) &= -\frac{2}{\mu^2}\lambda w,\\
\sigma_i \cos(\mathcal{A}_i x) &= -\frac{2}{\mu^2}\lambda (u - x_i),\\
\sigma_i \cos(\mathcal{A}_i y) &= -\frac{2}{\mu^2}\lambda (v - y_i),\\
\sigma_i \cos(\mathcal{A}_i z) &= -\frac{2}{\mu^2}\lambda (w - z_i).
\end{aligned}
\right.
$$

40. Des relations (19) nous conclurons, en conservant les notations des paragraphes précédents :

$$
(20)\quad \left\{
\begin{aligned}
\sigma &= \frac{2}{\mu^2}\lambda R,\\
\sigma_1 &= \frac{2}{\mu^2}\lambda R_1,\\
\sigma_2 &= \frac{2}{\mu^2}\lambda R_2,\\
\sigma_3 &= \frac{2}{\mu^2}\lambda R_3,
\end{aligned}
\right.
$$

et encore

$$
(21)\quad \sigma^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 = \frac{\lambda^2}{\mu^4}(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2),
$$

relations qui nous fournissent ces propriétés remarquables :

Théorème V. — *Les faces du tétraèdre dérivé sont respectivement égales à douze fois le produit du vo-*

lume primitif par la distance du centre de gravité du tétraèdre primitif au sommet opposé à la face homologue de la face considérée.

La somme des carrés des faces du tétraèdre dérivé est égale à trente-six fois le carré du volume du tétraèdre primitif multiplié par la somme des carrés de ses arêtes.

41. *Angle des arêtes opposées.*

Considérons, par exemple, les deux arêtes opposées mm_1, $m_2 m_3$; on a

$$mm_1 \cos(mm_1, x) = \frac{X - X_1}{\mu},$$

$$mm_1 \cos(mm_1, y) = \frac{Y - Y_1}{\mu},$$

. . . .

$$m_2 m_3 \cos(m_2 m_3, x) = \frac{X_2 - X_3}{\mu},$$

$$m_2 m_3 \cos(m_2 m_3, y) = \frac{Y_2 - Y_3}{\mu},$$

. . . .

d'où

$$\mu^2 . mm_1 . m_2 m_3 \cos(mm_1, m_2 m_3)$$
$$= (X - X_1)(X_2 - X_3) + (Y - Y_1)(Y_2 - Y_3) + (Z - Z_1)(Z_2 - Z_3);$$

effectuant les multiplications et substituant aux X_i, Y_i, Z_i leurs valeurs, on obtient la première des relations du groupe suivant :

$$(22)\ \begin{cases} \mu^2 . mm_1 . m_2 m_3 . \cos(mm_1, m_2 m_3) = f_3 - f_2 + 2A_{13} - 2A_{12}, \\ \mu^2 . mm_2 . m_3 m_1 . \cos(mm_2, m_3 m_1) = f_1 - f_3 + 2A_{21} - 2A_{23}, \\ \mu^2 . mm_3 . m_1 m_2 . \cos(mm_3, m_1 m_2) = f_2 - f_1 + 2A_{32} - 2A_{31}. \end{cases}$$

Si l'on a égard au groupe (V) du § II, nous donnerons à ces relations la forme plus remarquable

$$(23)\quad \begin{cases} mm_1 . m_2 m_3 \cos(mm_1,\ m_2 m_3) = \dfrac{\lambda^2}{\mu^2}\left(\dfrac{1}{d_2^2} - \dfrac{1}{d_3^2}\right), \\ mm_2 . m_3 m_1 \cos(mm_2,\ m_3 m_1) = \dfrac{\lambda^2}{\mu^2}\left(\dfrac{1}{d_3^2} - \dfrac{1}{d_1^2}\right), \\ mm_3 . m_1 m_2 \cos(mm_3,\ m_1 m_2) = \dfrac{\lambda^2}{\mu^2}\left(\dfrac{1}{d_1^2} - \dfrac{1}{d_2^2}\right). \end{cases}$$

42. *Calcul des dièdres.*

Le dièdre mm_1 est le supplément de l'angle $\mathcal{A}_2 \mathcal{A}_3$,
Le dièdre mm_2 est le supplément de l'angle $\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_3$,
. . . .

Or

$$\cos(\mathcal{A}_i \mathcal{A}_k) = \cos(\mathcal{A}_i x)\cos(\mathcal{A}_k x) + \cos(\mathcal{A}_i y)\cos(\mathcal{A}_k y) + \cos(\mathcal{A}_i z)\cos(\mathcal{A}_k z).$$

Ayant égard aux formules (16) et (17), puis au groupe (VI) du § II, on arrive facilement aux valeurs ci-dessous :

$$(24)\quad \begin{cases} 4\sigma_2\sigma_3 \cos(mm_1) = \dfrac{\lambda^2}{\mu^4}(-r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 - \rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 - 4\rho_1^2), \\ 4\sigma_3\sigma_1 \cos(mm_2) = \dfrac{\lambda^2}{\mu^4}(\ \ r_1^2 - r_2^2 + r_3^2 + \rho_1^2 - \rho_2^2 + \rho_3^2 - 4\rho_2^2), \\ 4\sigma_1\sigma_2 \cos(mm_3) = \dfrac{\lambda^2}{\mu^4}(\ \ r_1^2 + r_2^2 - r_3^2 + \rho_1^2 + \rho_2^2 - \rho_3^2 - 4\rho_3^2), \\ 4\sigma\sigma_1 \cos(m_2 m_3) = \dfrac{\lambda^2}{\mu^4}(-r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 - \rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 - 4r_1^2), \\ 4\sigma\sigma_2 \cos(m_3 m_1) = \dfrac{\lambda^2}{\mu^4}(\ \ r_1^2 - r_2^2 + r_3^2 + \rho_1^2 - \rho_2^2 + \rho_3^2 - 4r_2^2), \\ 4\sigma\sigma_3 \cos(m_1 m_2) = \dfrac{\lambda^2}{\mu^4}(\ \ r_1^2 + r_2^2 - r_3^2 + \rho_1^2 + \rho_2^2 - \rho_3^2 - 4r_3^2). \end{cases}$$

Ces relations nous donnent

$$(25)\left\{\begin{aligned}
\sigma\sigma_1 \cos(m_2 m_3) - \sigma_2\sigma_3 \cos(mm_1) &= \frac{\lambda^2}{\mu^4}(\rho_1^2 - r_1^2),\\
\sigma\sigma_2 \cos(m_3 m_1) - \sigma_1\sigma_3 \cos(mm_2) &= \frac{\lambda^2}{\mu^4}(\rho_2^2 - r_2^2),\\
\sigma\sigma_3 \cos(m_1 m_2) - \sigma_1\sigma_2 \cos(mm_3) &= \frac{\lambda^2}{\mu^4}(\rho_3^2 - r_3^2).
\end{aligned}\right.$$

43. *Angle des faces homologues.*

L'angle des faces homologues est l'angle des droites $\mathcal{A}_i$, A_i. On a

$$\cos(A_i\, x) = \frac{X_i}{\sqrt{f_i}}, \qquad \cos(A_i\, y) = \frac{Y_i}{\sqrt{f_i}} \qquad \text{eq. (12), § II;}$$

$$\cos(\mathcal{A}_i\, x) = -\frac{\lambda}{2\sigma_i\mu^2}(x_1 + x_2 + x_3 - 4r_i) \qquad \text{eq. (17), § V,}$$

si l'on se rappelle que

$$x_i X_i + y_i Y_i + z_i Z_i = \lambda,$$
$$x_k X_i + y_k Y_i + z_k Z_i = 0,$$

on obtient la valeur suivante pour $\cos(\mathcal{A}_i\, A_i)$

$$4 s_i \sigma_i \cos(\mathcal{A}_i\, A_i) = \frac{3\lambda^2}{\mu^2}.$$

Or, d'après l'équation (20),

$$\sigma_i = \frac{2\lambda}{\mu^2} R_i;$$

d'un autre côté, en désignant par h_i la hauteur correspondante à la face s_i dans le tétraèdre primitif, on a

$$\lambda = 2 h_i s_i.$$

On arrive donc enfin à cette propriété curieuse

$$(26) \qquad \cos(\mathcal{A}_i\, A_i) = \frac{3}{4}\frac{h_i}{R_i}.$$

On trouverait de la même manière

$$(26\ bis) \qquad \cos(\mathcal{A}_i\, A_k) = -\frac{1}{4}\frac{h_k}{R_i},$$

c'est-à-dire :

THÉORÈME VI. — *Le cosinus de l'angle de deux faces appartenant, l'une au tétraèdre primitif, l'autre au tétraèdre dérivé, est égal au quotient de la hauteur correspondant à la première face par la distance du centre de gravité au sommet opposé à la face homologue de la seconde, ce quotient étant multiplié par* $\frac{3}{4}$ *ou* $-\frac{1}{4}$ *suivant que les deux faces sont ou ne sont pas homologues.*

Cette propriété a lieu quelle que soit la ligne μ choisie.

44. *Plus courte distance de deux arêtes opposées.*

Considérons les deux arêtes opposées mm_1, $m_2 m_3$; menons par l'arête $m_2 m_3$ un plan parallèle à l'arête mm_1. Soit

$$1^\circ \qquad Q + Q_1 x + Q_2 y + Q_3 z = 0$$

l'équation de ce plan; il sera parallèle à la droite mm_1, si

$$2^\circ \qquad Q_1\frac{(X - X_1)}{\mu} + Q_2\frac{(Y - Y_1)}{\mu} + Q_3\frac{(Z - Z_1)}{\mu},$$

et il passera par les points m_2, m_3, si

$$3^\circ \qquad Q + Q_1 X_2 + Q_2 Y_2 + Q_3 Z_2 = 0,$$

$$4^\circ \qquad Q + Q_1 X_3 + Q_2 Y_3 + Q_3 Z_3 = 0.$$

Eliminant Q, Q_1, Q_2, Q_3 entre ces quatre équations, on aura pour l'équation du plan cherché

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 0 & \dfrac{X-X_1}{\mu} & \dfrac{Y-Y_1}{\mu} & \dfrac{Z-Z_1}{\mu} \\ 1 & \dfrac{X_2}{\mu} & \dfrac{Y_2}{\mu} & \dfrac{Z_2}{\mu} \\ 1 & \dfrac{X_3}{\mu} & \dfrac{Y_3}{\mu} & \dfrac{Z_3}{\mu} \end{vmatrix} = 0,$$

ou mieux

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 0 & \dfrac{X_1}{\mu} & \dfrac{Y_1}{\mu} & \dfrac{Z_1}{\mu} \\ 1 & \dfrac{X_2}{\mu} & \dfrac{Y_2}{\mu} & \dfrac{Z_2}{\mu} \\ 1 & \dfrac{X_3}{\mu} & \dfrac{Y_3}{\mu} & \dfrac{Z_3}{\mu} \end{vmatrix} = 0.$$

La plus courte distance des deux droites mm_1, $m_2 m_3$, distance que nous désignerons par D_1, sera la distance du point m_1, par exemple, à ce plan; nous aurons ainsi

$$D_1^2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{X_1}{\mu} & \dfrac{Y_1}{\mu} & \dfrac{Z_1}{\mu} \\ 0 & \dfrac{X_1}{\mu} & \dfrac{Y_1}{\mu} & \dfrac{Z_1}{\mu} \\ 1 & \dfrac{X_2}{\mu} & \dfrac{Y_2}{\mu} & \dfrac{Z_2}{\mu} \\ 1 & \dfrac{X_3}{\mu} & \dfrac{Y_3}{\mu} & \dfrac{Z_3}{\mu} \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} 0 & \dfrac{Y_1}{\mu} & \dfrac{Z_1}{\mu} \\ 1 & \dfrac{Y_2}{\mu} & \dfrac{Z_2}{\mu} \\ 1 & \dfrac{Y_3}{\mu} & \dfrac{Z_3}{\mu} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 0 & \dfrac{X_1}{\mu} & \dfrac{Z_1}{\mu} \\ 1 & \dfrac{X_2}{\mu} & \dfrac{Z_2}{\mu} \\ 1 & \dfrac{X_3}{\mu} & \dfrac{Z_3}{\mu} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 0 & \dfrac{X_1}{\mu} & \dfrac{Y_1}{\mu} \\ 1 & \dfrac{X_2}{\mu} & \dfrac{Y_2}{\mu} \\ 1 & \dfrac{X_3}{\mu} & \dfrac{Y_3}{\mu} \end{vmatrix}^2}$$

Or le numérateur peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{X_1}{\mu} & \dfrac{Y_1}{\mu} & \dfrac{Z_1}{\mu} \\ 1 & \dfrac{X_2}{\mu} & \dfrac{Y_2}{\mu} & \dfrac{Z_2}{\mu} \\ 1 & \dfrac{X_3}{\mu} & \dfrac{Y_3}{\mu} & \dfrac{Z_3}{\mu} \end{vmatrix} = \frac{L}{\mu^3} = \frac{\lambda^2}{\mu^3}.$$

Les différents termes du dénominateur se calculent aussi facilement; on a, par exemple,

$$\begin{vmatrix} 0 & \dfrac{Y_1}{\mu} & \dfrac{Z_1}{\mu} \\ 1 & \dfrac{Y_2}{\mu} & \dfrac{Z_2}{\mu} \\ 1 & \dfrac{Y_3}{\mu} & \dfrac{Z_3}{\mu} \end{vmatrix} = \frac{1}{\mu^2}\left(\frac{dL}{dX_2} + \frac{dL}{dX_3}\right) = \frac{\lambda}{\mu^2}(x_2 + x_3);$$

et il viendra définitivement

$$\mu^2 D_1^2 = \frac{\lambda^2}{r_2^2 + r_3^2 + 2 r_2 r_3 \cos(r_2 r_3)}.$$

Nous obtenons donc le groupe suivant

$$(27) \qquad \left\{ \begin{aligned} r_2^2 + r_3^2 + 2 r_2 r_3 \cos(r_2 r_3) &= \frac{1}{\mu^2}\frac{\lambda^2}{D_1^2}, \\ r_3^2 + r_1^2 + 2 r_1 r_3 \cos(r_1 r_3) &= \frac{1}{\mu^2}\frac{\lambda^2}{D_2^2}, \\ r_1^2 + r_2^2 + 2 r_1 r_2 \cos(r_1 r_2) &= \frac{1}{\mu^2}\frac{\lambda^2}{D_3^2}; \end{aligned} \right.$$

D_1, D_2, D_3 sont les plus courtes distances des arêtes opposées dans le tétraèdre dérivé.

Ces relations sont faciles à énoncer et à transformer.

45. On constate encore facilement la propriété suivante :

THÉORÈME VII. — *Le volume du tétraèdre primitif est égal au produit de deux arêtes prises, l'une dans le tétraèdre primitif, l'autre dans le tétraèdre dérivé, par le cosinus de leur angle, ou à la moitié de ce produit, suivant que les arêtes ne sont pas ou sont homologues.*

Sont exceptés naturellement les couples d'arêtes conjuguées tels que $(OM_1, m_2 m_3)$, $(OM_2, m_3 m_1)$, $(OM_3, m_1 m_2)$, car ces arêtes sont évidemment perpendiculaires entre elles.

46. Si l'on désigne par H_i la hauteur correspondant à la face σ_i dans le tétraèdre dérivé, on a, eu égard aux relations (5), (20), (26),

$$(28)\quad H_i = \frac{\lambda'}{2\sigma_i} = \frac{2\lambda^2}{\mu^3 \sigma_i} = \frac{\lambda}{\mu R_i} = \frac{2 s_i h_i}{\mu R_i} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{8}{3} s_i \cos(\mathcal{A}_i A_i);$$

c'est-à-dire :

THÉORÈME VIII. — *Les hauteurs du tétraèdre dérivé sont respectivement égales aux $\frac{8}{3}$ de la projection sur la face correspondante de l'aire de la face homologue dans le tétraèdre primitif.*

47. On peut encore se proposer de construire le tétraèdre dérivé du tétraèdre dérivé; ce nouveau tétraèdre, que j'appellerai *sous-dérivé,* s'obtiendra par l'application de la définition (nº 34) ; et nous prendrons encore le point O pour origine des perpendiculaires.

Si $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$, $\mathcal{M}_3$ sont les sommets du tétraèdre sous-dérivé, nous devons prendre

$$O\mathcal{M}_i = \frac{2\sigma_i}{\mu};$$

de sorte que les coordonnées ξ'_i, η'_i, ζ'_i du sommet $\mathfrak{M}_i$ seront

$$(29)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi'_i &= \frac{2\sigma_i}{\mu}\cos(\mathcal{A}_i x),\\ \eta'_i &= \frac{2\sigma_i}{\mu}\cos(\mathcal{A}_i y),\\ \zeta_i &= \frac{2\sigma_i}{\mu}\cos(\mathcal{A}_i z). \end{aligned}\right.$$

En faisant usage des relations (19), on trouve alors

$$(30)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi' &= -\frac{4\lambda}{\mu^3}u, & \xi'_i &= -\frac{4\lambda}{\mu^3}(u-x_i),\\ \eta' &= -\frac{4\lambda}{\mu^3}v, & \eta'_i &= -\frac{4\lambda}{\mu^3}(v-y_i),\\ \zeta' &= -\frac{4\lambda}{\mu^3}w, & \zeta'_i &= -\frac{4\lambda}{\mu^3}(w-z_i). \end{aligned}\right.$$

A l'aide de ces formules, on vérifie facilement l'exactitude du théorème suivant :

THÉORÈME IX. — *Les arêtes du tétraèdre sous-dérivé sont respectivement parallèles et proportionnelles aux arêtes du tétraèdre primitif, et son centre de gravité est encore au point* O.

La considération du tétraèdre sous-dérivé n'apporte donc pas de nouvelles propriétés.

48. *Remarque.* — Le volume du tétraèdre dérivé $mm_1m_2m_3$ est égal, à un facteur numérique près, au carré du volume du tétraèdre primitif $OM_1M_2M_3$; il atteindra donc en même temps sa valeur maximum. Or, si l'on se reporte aux relations (11) et (12), on voit que la question résolue d'abord donne en même temps la solution du problème suivant :

Trouver le volume maximum d'un tétraèdre dont on donne la différence des carrés des arêtes opposées, ainsi que la somme des carrés des arêtes appartenant ou à un même sommet ou à une même face.

Ce tétraèdre maximum jouit de propriétés moins saillantes que celles du tétraèdre primitif. Je ne citerai que la suivante qui résulte immédiatement des relations (24), § V, et (8), § IV :

$$(31)\quad \left\{\begin{array}{l} \sigma_2\sigma_3\cos(mm_1)+\sigma\sigma_1\cos(m_2m_3) \\ \sigma_3\sigma_1\cos(mm_2)+\sigma\sigma_2\cos(m_3m_1) \\ \sigma_1\sigma_2\cos(mm_3)+\sigma\sigma_3\cos(m_1m_2) \end{array}\right\} = -\frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{\mu^4}\left(\sqrt{\theta}+\frac{c}{\sqrt{\theta}}\right).$$

Ne voulant pas donner à ce Mémoire une trop grande étendue, je ne prolongerai pas plus loin ces recherches.