V.-A. LE BESGUE

Arithmologie élémentaire

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 405-413

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__405_1>

ARITHMOLOGIE ÉLÉMENTAIRE;

PAR V.-A. LE BESGUE.

TROISIÈME ARTICLE.

11. Dans les calculs suivants, $\varphi(x)$ étant une fonction de x, en ce sens qu'elle en dépend d'une manière quelconque, connue ou inconnue, on représentera par $\varphi_0(x)$ une quantité $< \varphi(x)$, et par $\varphi_1(x)$ une quantité $> \varphi(x)$. Les quantités $\varphi_1(x)$, $\varphi_0(x)$ seront nommées des limites supérieure et inférieure de $\varphi(x)$, mais sans attacher au mot *limite* sa véritable signification. On emploiera les

inégalités évidentes

$$\varphi_1(x).\theta_1(x) > \varphi(x).\theta(x) > \varphi_0(x).\theta_0(x),$$
$$\varphi_1(x) - \theta_0(x) > \varphi(x) - \theta(x) > \varphi_0(x) - \theta_1(x),$$

et quelques autres qu'il serait inutile d'inscrire ici.

Pour avoir deux limites simples de la somme des logarithmes des nombres consécutifs $1, 2, 3, \ldots, x$, c'est-à-dire $\log \Pi x$ ou $\Sigma \log x$, il faut prendre l'inégalité déjà citée

$$\left(\frac{x}{2}\right)^x > \Pi x > \left(\frac{x}{e}\right)^x,$$

où l'on suppose $x > 5$ et e égal à la base du système des logarithmes népériens.

Si l'on prend les logarithmes pour une base quelconque, par exemple pour la base 10, on aura

$$x(\log x - \log 2) > \Sigma \log x > x(\log x - \log e).$$

Dans les calculs suivants, on aura à considérer la somme $\Sigma \log E(x)$, où $E(x)$ est l'entier d'une quantité fractionnaire x ; l'inégalité

$$E(x)[\log E(x) - \log 2] > \Sigma \log E(x) > E(x)[\log E(x) - \log e]$$

devra être exprimée en fonction de x.

En augmentant le premier membre ou la limite supérieure, on lui donnera la forme

$$x(\log x - \log 2).$$

En diminuant la limite inférieure, on lui donnera la forme

$$(x - 1)[\log(x - 1) - \log e).$$

Si l'on met $(x - 1)\log(x - 1)$ sous la forme

$$(x - 1)\left[\log x + \log\left(\frac{x - 1}{x}\right)\right],$$

on aura

$$(x-1)[\log(x-1)-\log e]$$
$$=x(\log x-\log e)-\log x+\log e+(x-1)\log\left(\frac{x-1}{x}\right).$$

Or il est facile de montrer que la quantité négative

$$(x-1)\log\left(\frac{x-1}{x}\right)=(x-1)\log\left(1-\frac{1}{x}\right)$$

n'atteint pas $\log e$ en valeur absolue.

$$-\log\left(1-\frac{1}{x}\right)=\log e\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+\cdots\right)$$
$$<\log e\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\cdots\right)<\frac{\log e}{x-1};$$

de là

$$-(x-1)\log\left(\frac{x-1}{x}\right)<\log e.$$

On aurait pu faire

$$-(x-1)\log\left(\frac{x-1}{x}\right)=(x-1)\log\left(\frac{x-1}{x}\right)$$
$$=(x-1)\log\left(1+\frac{1}{x-1}\right)$$
$$=\log\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x-1},$$

quantité qui, pour x tendant vers l'infini, tend vers $\log e$.

On admettra donc, dans tous les cas, l'inégalité

$$(f)\quad x(\log x-\log 2)>\Sigma\log\mathrm{E}(x)>x(\log x-\log e)-\log x.$$

12. Connaissant deux limites du logarithme de $\Pi(x)$,

on peut en trouver deux du logarithme de

$$\Pi_1(x) = \frac{\Pi(x).\Pi\left(\frac{x}{30}\right)}{\Pi\left(\frac{x}{2}\right).\Pi\left(\frac{x}{3}\right).\Pi\left(\frac{x}{5}\right)},$$

où c'est pour abréger que l'on n'a pas mis $E\left(\frac{x}{30}\right)$, $E\left(\frac{x}{2}\right)\ldots$, au lieu de $\frac{x}{30}$, $\frac{x}{2}$, etc.

On a donc

$$\log \Pi_1(x) = \Sigma \log x + \Sigma \log E\left(\frac{x}{30}\right)$$
$$-\left[\Sigma \log E\left(\frac{x}{2}\right) + \Sigma \log E\left(\frac{x}{3}\right) + \Sigma \log E\left(\frac{x}{5}\right)\right].$$

Admettant le cas le plus général où x n'est pas entier, et posant

$$\log \Pi_1(x) = \varphi(x) - \theta(x),$$

il viendra

$$\varphi_1(x) = \frac{31}{30}x(\log x - \log 2) - x \log \sqrt[30]{30},$$

$$\theta_1(x) = \frac{31}{30}x(\log x - \log 2) - x \log \sqrt{2}.\sqrt[3]{3}.\sqrt[5]{5},$$

et de même

$$\varphi_0(x) = \frac{31}{30}x(\log x - \log e) - x \log \sqrt[30]{30} - 2\log x - \log 30,$$

$$\theta_0(x) = \frac{31}{30}x(\log x - \log e) - x \log \sqrt{2}\sqrt[3]{3}\sqrt[5]{5} - 3\log x + \log 30,$$

ou encore

$$\varphi_0(x) = \varphi_1(x) - \frac{31}{30}x(\log e - \log 2) - 2\log x + \log 30,$$

$$\theta_0(x) = \theta_1(x) - \frac{31}{30}x(\log e - \log 2) - 3\log x + \log 30.$$

Substituant dans

$$\varphi_1(x) - \theta_0(x) > \log \Pi_1(x) > \varphi_0(x) - \theta_1(x),$$

il vient

$$\varphi_1(x) - \theta_1(x) + \frac{31}{30} x \log\left(\frac{e}{2}\right) + 3\log x - \log 30 > \log \Pi_1(x)$$

$$> \varphi_1(x) - \theta_1(x) - \frac{31}{30} x \log\left(\frac{e}{2}\right) - 2\log x + \log 30,$$

et comme l'on a

$$\varphi_1(x) - \theta_1(x) = x \log \frac{\sqrt{2}.\sqrt[3]{3}.\sqrt[5]{5}}{\sqrt[30]{30}},$$

en posant

$$a = \log \frac{\sqrt{2}\sqrt[3]{3}\sqrt[5]{5}}{\sqrt[30]{30}} + \frac{31}{30} \log\left(\frac{e}{2}\right) = 0,5374,$$

$$a' = \log \frac{\sqrt{2}\sqrt[3]{3}\sqrt[5]{5}}{\sqrt[30]{30}} - \frac{31}{30} \log\left(\frac{e}{2}\right) = 0,2624,$$

il vient

$$(g) \qquad ax + 3\log x > \log \Pi_1(x) > a'x - 2\log x,$$

en augmentant la limite supérieure de log 30 et diminuant l'inférieure de log 30.

13. Au moyen des limites précédentes de $\Pi_1(x)$, on peut trouver celles de

$$P_1(x) = P(x).P(\sqrt{x}).P(\sqrt[3]{x})\ldots$$

D'après le théorème du n° 9 on a

$$\Pi_1(x).\Pi_1\left(\frac{x}{6}\right).\Pi_1\left(\frac{x}{6^2}\right)\ldots\Pi_1\left(\frac{x}{6^r}\right) > P_1(x) > \Pi_1(x);$$

passant aux logarithmes, le premier membre devient

$$a\left(x + \frac{x}{6} + \frac{x}{6^2} + \ldots \frac{x}{6^r}\right) + 3\left(\log x + \log\frac{x}{6} + \ldots + \log\frac{x}{6^r}\right),$$

en supposant $x = \lambda 6^y$, y entier et $\lambda < 6$, d'où l'on tire

$$y \log 6 = \log x - \log \lambda, \quad 1 + y = 1 + \frac{\log x - \log \lambda}{\log 6},$$

on voit que la partie

$$a\left(x + \frac{x}{6} + \ldots + \frac{x}{6^y}\right) = ax\left(\frac{1 - \frac{1}{6^{y+1}}}{1 - \frac{1}{6}}\right)$$

$$= \frac{6}{5} ax\left(1 - \frac{\lambda}{6x}\right) = \frac{6a}{5}\left(x - \frac{\lambda}{6}\right),$$

on la remplacera par $\frac{6a}{5}x$, en l'augmentant.

La partie

$$3\left(\log x + \log\frac{x}{6} + \log\frac{x}{6^2} + \ldots + \log\frac{x}{6^y}\right)$$

$$= 3(y+1)\left(\log x - \frac{y \log 6}{2}\right)$$

$$= 3\left(1 + \frac{\log x - \log \lambda}{\log 6}\right)\left(\frac{\log x + \log \lambda}{2}\right)$$

$$= \frac{3 \log^2 x}{2 \log 6} + \frac{3}{2}\log x - \frac{3 \log^2 \lambda}{2 \log 6} + \frac{3}{2}\log \lambda.$$

Comme $\log 6 = 0{,}47712$, on peut, en augmentant cette partie, la réduire à

$$\frac{3}{2 \log 6}\log^2 x + \frac{3}{2}\log x + 1{,}2.$$

On aura donc l'inégalité

$$(h) \quad \begin{cases} \dfrac{6a}{5}x + \dfrac{3}{2\log 6}\log^2 x + \dfrac{3}{2}\log x + 1{,}2 > \log P_1(x) \\ > a' x - 2 \log x. \end{cases}$$

14. Enfin, pour avoir les limites de $\log P(x)$ ou de la somme des nombres premiers non supérieurs à x, il faut employer l'inégalité

$$\frac{P_1(x)}{P_1(\sqrt{x})} > P(x) > \frac{P_1(x)}{[P_1(\sqrt{x})]^2},$$

en prendre les logarithmes, remplacer le premier membre par une quantité plus grande, le dernier par une quantité plus petite; les inégalités (h) conduisent ainsi à cette autre

$$\frac{6a}{5}x + \frac{3}{2\log 6}\log^2 x + \frac{3}{2}\log x + 1{,}2 - a'\sqrt{x} + \log x$$
$$> \log P(x) > a'x - 2\log x - \frac{12a}{5}\sqrt{x} - \frac{3}{4}\frac{\log^2 x}{\log 6}$$
$$- \frac{3}{2}\log x - 2{,}4,$$

ou bien, en réduisant,

$$(i)\left\{\begin{aligned} &\frac{6ax}{5} - a'\sqrt{x} + \frac{3}{2\log 6}\log^2 x + \frac{5}{2}\log x + 1{,}2 > \log P(x), \\ &\log P(x) > a'x - \frac{12a}{5}\sqrt{x} \\ &\qquad\qquad - \frac{3}{4}\frac{\log^2 x}{\log 6} - \frac{7}{2}\log x - 2{,}4. \end{aligned}\right.$$

Au moyen de ces limites de $\log P(x) = \varphi(x)$, l'inégalité

$$\varphi_0(mx) - \varphi_1(x) > K(\log x + \log m),$$

qui exprime, quand elle est satisfaite, qu'il y a plus de

K nombres premiers entre x et mx, devient

$$(e')\left\{\begin{array}{l}\left(a'm-\frac{6}{5}a\right)x-\left(\frac{12\sqrt{m}}{5}a-a'\right)\sqrt{x}-\frac{9}{4}\frac{\log^2 x}{\log 6}\\-\left(\frac{3\log m}{3\log 6}+6\right)\log x-\left(\frac{3\log^2 m}{4\log 6}+\frac{7}{2}\log m+3,6\right)\\>\mathrm{K}\log x+\mathrm{K}\log m.\end{array}\right.$$

Cette inégalité ne peut être satisfaite que pour

$$m>\frac{6}{5}\frac{a}{a'}>2,459 \quad \text{ou} \quad m>2,46.$$

Si on la met sous la forme

$$x-\mathrm{A}\sqrt{x}>\mathrm{B}\log^2 x+\mathrm{C}\log x+\mathrm{D},$$

où A, B, C, D sont positifs, on trouvera bientôt, pour une valeur donnée de $m>2,46$, qu'au-dessus d'une certaine valeur de x il y aura plus de K nombres premiers entre x et mx.

15. En partant de la formule de M. Liouville :

$$\Sigma\log x=\sqrt{2\pi}+x\log x-x+\frac{1}{2}\log x+\frac{\mu}{12x},$$

μ étant compris entre o et 1, M. Tchebichew a trouvé pour limites de la somme des logarithmes non supérieurs à x les expressions

$$\frac{6\mathrm{A}}{5}x-\mathrm{A}\sqrt{x}+\frac{5}{4\log 6}\log^2 x+\frac{5}{2}\log x+2,$$

$$\mathrm{A}x-\frac{12}{5}\mathrm{A}\sqrt{x}-\frac{5}{8\log 6}\log^2 x-\frac{15}{4}\log x-3,$$

en supposant les logarithmes népériens et

$$\mathrm{A}=\log\frac{\sqrt{2}\sqrt[3]{3}\sqrt[5]{5}}{\sqrt[30]{30}};$$

de là l'inégalité

$$A\left(m-\frac{6}{5}\right)x-\left(\frac{12\sqrt{m}}{5}-1\right)A\sqrt{x}>\frac{15}{8\log 6}\log^2 x$$
$$+\left(\frac{5\log m}{4\log 6}+\frac{25}{4}+K\right)\log x$$
$$+\left[\frac{5\log^2 m}{8\log 6}+\left(\frac{15}{4}+K\right)\log m+5\right]>0.$$

Cette inégalité n'apprend rien quand on n'a pas $m>\frac{6}{5}$; mais quand $m>\frac{6}{5}$, en prenant x suffisamment grand on fait tomber entre x et mx autant de nombres premiers qu'on voudra. Ainsi pour $m=2$, au delà de $x=169=13^2$, il y a plus de quatre nombres premiers entre x et $2x$. Cette limite de x est beaucoup trop grande; la table de Burckhardt fait voir que $x=22$ suffit. Il est à désirer que le problème soit repris et résolu pour de moindres valeurs de m, en employant, s'il est possible, une fonction autre que $\Sigma\log x$.