CAQUÉ

Sur le lieu du sommet d'un angle dont les côtés sont respectivement tangents à deux coniques ayant un foyer commun, les rayons menés de ce foyer aux deux points de contact faisant un angle constant donné

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 402-405

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__402_1>

NOTE

Sur le lieu du sommet d'un angle dont les côtés sont respectivement tangents à deux coniques ayant un foyer commun, les rayons menés de ce foyer aux deux points de contact faisant un angle constant donné;

PAR M. CAQUÉ,
Professeur au collége Rollin.

Les équations de deux coniques ayant un foyer commun sont en coordonnées rectangulaires; et, quand on prend ce foyer pour origine,

$$(1) \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = (lx + my + p)^2, \\ x'^2 + y'^2 = (l'x' + m'y' + p')^2. \end{cases}$$

Si l'on mène deux tangentes, l'une à la première conique et par le point (xy), l'autre à la seconde conique et par le point $(x'y')$, les coordonnées X et Y du point de concours de ces tangentes satisferont aux équations

$$(2) \qquad \begin{cases} Xx + Yy = (lX + mY + p)(lx + my + p) \\ Xx' + Yy' = (l'X + m'Y + p')(l'x' + m'y' + p') \end{cases}$$

Pour trouver l'équation du lieu décrit par le sommet d'un angle dont les côtés sont respectivement tangents à deux coniques ayant un foyer commun, lorsque les rayons vecteurs menés de ce foyer aux deux points de contact font un angle constant, il faudrait éliminer x, y, x', y' entre (1) et (2) et l'équation exprimant que l'angle des rayons vecteurs est constant.

Pour faciliter cette élimination, soient r, r' et R les rayons vecteurs des points (x, y), (x', y'), (X, Y); α, α', 6, les angles que ces rayons vecteurs font avec l'axe des x, et soit 2θ l'angle constant que font entre eux r et r'.

Posons enfin, pour abréger,

$$d = lx + my + p, \qquad d' = l'x' + m'y' + p',$$
$$D = lX + mY + p, \qquad D' = l'X + m'Y + p'.$$

Les équations (1) deviendront

$$(3) \qquad r^2 = d^2, \quad r'^2 = d'^2.$$

Les équations (2) deviendront, en ayant égard à (3),

$$(4) \qquad R\cos(6 - \alpha) = D, \quad R\cos(6 - \alpha') = D',$$

et l'on aura la condition

$$(5) \qquad \alpha' - \alpha = 2\theta.$$

Les équations (4) combinées par addition et par soustraction donnent, en ayant égard à (5),

$$R\cos\left(6 - \frac{\alpha' + \alpha}{2}\right) = \frac{D + D'}{2\cos\theta},$$
$$R\sin\left(6 - \frac{\alpha' + \alpha}{2}\right) = \frac{D' - D}{2\sin\theta};$$

d'où l'on déduit

$$(6)\qquad R^2 = \left(\frac{D' + D}{2\cos\theta}\right)^2 + \left(\frac{D' - D}{2\sin\theta}\right)^2,$$

ou, après réduction,

$$(7)\qquad R^2 \sin^2 2\theta = D^2 + D'^2 - 2DD'\cos 2\theta.$$

Les coordonnées des points communs à cette conique et l'une des coniques (3), la première par exemple, satisfont à l'équation

$$D\cos 2\theta - D' = 0,$$

représentant une droite passant au point de concours des directrices des coniques données.

Le lieu cherché est donc la conique doublement tangente à chacune des coniques données, et telle, que chaque corde qui lui est commune avec chacune d'elles passe au point de concours de leurs directrices.

Pour répondre à la question posée au Concours général, il suffit d'exprimer que les coniques données sont semblables, c'est-à-dire ont la même excentricité e, et que l'angle de leurs rayons minima, ou l'angle de leurs directrices, est 2θ.

A cet effet on prendra l'axe des x, dont la direction est restée arbitraire, parallèle à la bissectrice de l'angle des directrices des coniques données, et l'on posera dans l'équation (6)

$$D = e(X\cos\theta + Y\sin\theta - q),$$
$$D' = e(X\cos\theta - Y\sin\theta - q').$$

On trouvera

$$(8)\qquad R^2 = e^2\left[\left(X - \frac{q + q'}{2\cos\theta}\right)^2 + \left(Y - \frac{q - q'}{2\sin\theta}\right)^2\right].$$

Le point de concours des directrices

$$D = 0, \quad D' = 0$$

a pour abscisse et pour ordonnée

$$\frac{q + q'}{2 \cos \theta} \quad \text{et} \quad \frac{q - q'}{2 \sin \theta}.$$

L'équation (8) exprime donc que le lieu demandé est celui des points dont les distances au foyer commun et à l'intersection des directrices sont dans un rapport constant, égal à l'excentricité commune des coniques; ce lieu est donc un cercle en général, et une droite si les coniques sont deux paraboles.

On remarquera que le lieu ne changerait ni de grandeur ni de position, si l'on faisait varier les coniques données, en conservant toutefois leur excentricité commune, leur foyer commun et le point de concours de leurs directrices.