NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LÉON SANCERY

De la méthode des substitutions successives pour le calcul des racines des équations

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 384-400

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__384_1>

DE LA MÉTHODE DES SUBSTITUTIONS SUCCESSIVES POUR LE CALCUL DES RACINES DES ÉQUATIONS

(voir page 305),

PAR M. LÉON SANCERY,
Professeur au lycée d'Auch.

V.

Application à l'équation du second degré.

Écrivons l'équation $x^2+px+q=0$ de la manière suivante :

$$x=-\frac{q}{p}-\frac{x^2}{p}.$$

La dérivée du second membre est $-\frac{2x}{p}$; on ne pourra utiliser la méthode des substitutions successives pour le calcul des racines $x',\, x''$ que dans le cas où les valeurs $-\frac{2x'}{p}$, $-\frac{2x''}{p}$ seront comprises entre -1 et $+1$.

1° Supposons les racines x', x'' de même signe, et $x'<x''$ en valeur absolue. On aura $p=-(x'+x'')$, par suite $-\frac{2x}{p}=\frac{2x}{x'+x''}$. La valeur de cette dérivée est positive pour $x=x'$, $x=x''$; mais elle n'est inférieure à l'unité que pour $x=x'$. Ainsi la forme ci-dessus donnée à l'équation ne permet que le calcul de la racine qui a la plus petite valeur numérique.

Déterminons quelles peuvent être les valeurs initiales ou de départ. Il suffit de chercher quelles sont les valeurs qui rendent $-\frac{2x}{p} \mid \gtrless_1^0$ et de prendre l'une de ces valeurs. On trouve ainsi que x doit être compris entre o et $-\frac{p}{2}$. On peut donc prendre pour première valeur $x_1 = -\frac{q}{p}$; car, les racines étant réelles, $-\frac{q}{p}$ est toujours compris entre o et $-\frac{p}{2}$.

2° Supposons les racines de signes contraires, l'équation est alors $x^2 + px - q = 0$, d'où $x = \frac{q}{p} - \frac{x^2}{p}$. Soient x'_1, x''_1 les valeurs absolues des racines et $x'_1 < x''_1$, la fonction $-\frac{2x}{p}$ ou $\frac{2x}{x' + x''}$ est positive et plus grande que l'unité pour $x = x''$; elle est négative et égale à $-\frac{2x'_1}{x''_1 - x'_1}$, pour $x = x'$. Or, afin que cette valeur soit supérieure à -1, il faut que $3x'_1 < x''_1$.

En mettant dans l'équation le signe de p en évidence, on a

$$x = \mp\left(\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}\right);$$

donc

$$x'_1 = \sqrt{\frac{p^2}{4} + q} - \frac{p}{2}, \quad x''_1 = \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q};$$

la relation $3x'_1 < x''_1$ conduit ainsi à l'inégalité

$$3\sqrt{\frac{p^2}{4} + q} - \frac{3p}{2} < \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q},$$

qui se réduit à

$$\frac{q}{p^2} < \frac{3}{4}.$$

Ainsi lorsque les racines sont de signes contraires, la forme particulière donnée ci-dessus à l'équation du second degré ne permettra le calcul de la racine qui a la plus petite valeur absolue que lorsque les coefficients satisferont à l'inégalité

$$\frac{q}{p^2} < \frac{3}{4}.$$

Cherchons maintenant une valeur de départ. Nous supposerons, pour plus de simplicité, dans tout ce qui va suivre, p positif. Alors la racine qui a la plus petite valeur numérique est positive.

De la relation $\frac{q}{p^2} < \frac{3}{4}$ on tire $-\frac{4q}{3p^2} > -1$. Si donc on pose $-\frac{4q}{3p^2} = -\frac{2x}{p}$, la valeur $x_1 = \frac{2q}{3p}$ que l'on en déduit rendra la dérivée plus grande que -1 et plus petite que zéro. Cette valeur x_1 est moindre que x'; car, puisque

$$x' = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q} = \frac{q}{\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}},$$

on aura, en remplaçant dans le dénominateur q par $\frac{3}{4}p^2$,

$$x' > \frac{q}{\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + \frac{3}{4}p^2}},$$

ou $x' > \frac{2q}{3p}$, c'est-à-dire $x' > x_1$.

Si l'on cherche les limites qui ont été signalées au § IV, on trouve o et $\frac{p}{2}$, par suite les deux intervalles $\alpha \ldots L$, $L' \ldots \alpha$, sont ici respectivement $-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}+q} \ldots o$, $\frac{p}{2} \ldots -\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$. En les comparant on voit que si $\frac{q}{p^2}<\frac{5}{16}$, le premier est plus petit que le second; si $q>\frac{5}{16}$, le contraire a lieu. x_1 étant toujours situé dans le premier intervalle, il est établi que lorsque $\frac{q}{p^2}<\frac{5}{16}$, la valeur de départ x_1 fournit des valeurs successives telles, que chacune approche plus de la racine que la précédente.

Nous allons démontrer qu'il en est encore ainsi lorsque $\frac{q}{p^2}>\frac{5}{16}$. En effet, la valeur $x_2=\frac{q}{p}-\frac{4q^2}{9p^3}$ que fournit x_1 étant supérieure à x' et moindre que $\frac{p}{2}$, sera dans le cas actuel située dans le plus petit des deux intervalles $\alpha \ldots L, L' \ldots \alpha$, et, par suite, chacune des valeurs obtenues après x_2 approchera plus que la précédente de la racine x'. Si donc $x_2-x'<x'-x_1$, toutes les valeurs qui suivent x_1 seront dans le même cas. Or l'inégalité $x_2-x'<x'-x_1$ devient, lorsque l'on y remplace les quantités qu'elle renferme par leurs valeurs,

$$\frac{q}{p}-\frac{4q^2}{9p^3}+\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}<-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}-\frac{2q}{3p}$$

ou bien

$$9p^4+15p^2q<4q^2+18p^3\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}.$$

Or si $q = \frac{3}{4}p^2$, on a $x_1 = x' = x_2 = \frac{p}{2}$. La première inégalité, et par suite la seconde, se transforme dans cette hypothèse en une égalité. Si $q < \frac{3}{4}p^2$, le second membre de la deuxième inégalité acquiert une valeur supérieure à celle qu'il a pour $q = \frac{3}{4}p^2$; le premier, au contraire, prend une valeur inférieure; donc l'inégalité est évidente. Par suite x_2 est plus approché que x_1.

La théorie précédente complète la Note donnée par M. Gerono dans les *Nouvelles Annales*, t. XVI, p. 436. Elle prouve que la méthode des substitutions successives appliquée à l'équation du second degré $x^2 + px - q = 0$ mise sous la forme $x = \frac{q}{p} - \frac{x^2}{p}$ ne pourra servir au calcul de la racine positive que lorsque $\frac{q}{p^2} < \frac{3}{4}$, et que dans ce cas la quantité $\frac{2q}{3p}$ jouit de la propriété de fournir des valeurs successives approchant chacune plus que la précédente de la racine x'.

Les valeurs de x qui rendent la dérivée $-\frac{2x}{p} > -1$ étant comprises entre 0 et $\frac{p}{2}$, on voit que la quantité $\frac{q}{p}$, qui a servi dans le cas où les racines étaient de même signe, n'est pas forcément comprise entre 0 et $\frac{p}{2}$; il faudrait, pour qu'il en fût ainsi, que $p^2 > 2q$. L'application de la méthode exigeant seulement que $p^2 > \frac{4}{3}q$, on voit que la deuxième inégalité peut être satisfaite sans que la première le soit. Toutefois nous allons démontrer que lorsque $p^2 > \frac{3}{4} q$, on peut encore prendre pour valeur de départ $x_1 = \frac{q}{p}$.

On a (*)

$$x_{n+1} = \frac{q}{p} - \frac{x_n^2}{p}, \quad x_{n+2} = \frac{q}{p} - \frac{x_{n+1}^2}{p};$$

d'où

$$x_{n+2} - x_{n+1} = \frac{x_n^2 - x_{n+1}^2}{p},$$

ou bien

$$x_{n+2} - x_{n+1} = -(x_{n+1} - x_n)\frac{x_{n+1} + x_n}{p}.$$

Pour que les deux différences $x_{n+2} - x_{n+1}$, $x_{n+1} - x_n$ soient de signes contraires, et la première numériquement moindre que la seconde, on doit avoir

$$\frac{x_{n+1} + x_n}{p} > 0, \quad \frac{x_{n+1} + x_n}{p} < 1.$$

Or

$$\frac{x_{n+1} + x_n}{p} = \frac{q}{p^2} - \frac{x_n^2}{p^2} + \frac{x_n^2}{p};$$

les deux inégalités précédentes deviennent donc

$$-x_n^2 + px_n + q > 0, \quad -x_n^2 + px_n + q - p^2 < 0.$$

Pour que la première soit satisfaite, x_n doit être compris entre les racines de l'équation $X^2 - pX - q = 0$, c'est-

(*) Les calculs qui suivent peuvent être reliés entre eux par un raisonnement inverse et fournir ainsi une solution élémentaire plus complète que celle qui a été donnée jusqu'à ce jour, de cette question du programme de mathématiques spéciales : « Résolution de l'équation $ax^2 + bx - c = 0$, » lorsque a est très-petit », si toutefois on emploie pour solution de cette question la méthode des substitutions successives.

à-dire entre

$$\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} + q} \quad \text{et} \quad \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}.$$

Quant à la seconde, les racines de l'équation

$$X^2 - pX - q + p^2 = 0$$

étant imaginaires si $3p^2 > 4q$, elle est satisfaite pour toute valeur de x. Pour que la quantité $\frac{q}{p}$ puisse être une valeur de départ, il suffit de voir si

$$\frac{q}{p} < \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}.$$

Or cette inégalité est satisfaite si l'on a $\frac{q}{p^2} < 2$. Ce qui a lieu effectivement.

Lorsque $\frac{q}{p^2} < \frac{3}{4}$ et $\frac{q}{p}$ la valeur de départ, les premières valeurs obtenues peuvent ne pas satisfaire à la condition que chacune d'elles soit plus approchée de la racine que la précédente. Mais l'ensemble des valeurs supérieures à x' tend vers x', et il en est de même des valeurs inférieures. Ce qu'il y a de remarquable, c'est qu'une valeur approchée par défaut donne toujours pour la valeur suivante un nombre approchant davantage de la vraie valeur de la racine.

En effet, soient $x_n < x'$, $x_{n+1} > x'$; la différence $x_{n+1} - x'$ sera moindre que $x' - x_n$, si l'on a $x_n + x_{n+1} < 2x'$. Substituons les valeurs de x_{n+1} et de x' et posons

$$-p + 2\sqrt{\frac{p^2}{4} + q} > x_n + \frac{q}{p} - \frac{x_n^2}{p}.$$

On en déduit

$$x_n^2 - px_n - q - p^2 + 2p\sqrt{\frac{p^2}{4}+q} > 0;$$

x_n doit donc être inférieur à la plus petite des racines

$$-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}+q},\quad \frac{3}{2}p-\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$$

de l'équation

$$x^2 - px - q - p^2 + 2p\sqrt{\frac{p^2}{4}+q} = 0;$$

et comme cette plus petite racine $-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$ est la racine elle-même qu'il s'agit de calculer, on voit que l'inégalité

$$x_{n+1} - x' < x' - x_n$$

est satisfaite d'elle-même.

Les valeurs supérieures à x' peuvent au contraire donner des valeurs moins approchées qu'elles-mêmes. En effet, de l'inégalité

$$x_n - x' > x' - x_{n+1}$$

on déduit

$$x_n^2 - px_n - q - p^2 + 2p\sqrt{\frac{p^2}{4}+q} < 0,$$

et, par conséquent, x_n est une valeur comprise entre les racines

$$-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}+q},\quad \frac{3}{2}p-\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$$

de l'équation

$$x^2 - px - q - p^2 + 2p\sqrt{\frac{p^2}{4}+q} = 0.$$

Si donc x_n n'est pas inférieur à $\frac{3}{2}p - \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$, la valeur x_{n+1} sera moins approchée que x_n. Si l'on pose

$$\frac{q}{p} < \frac{3}{2}p - \sqrt{\frac{p^2}{4} + q};$$

on trouve

$$2 < \left(2 - \frac{q}{p^2}\right)^2,$$

ou bien

$$\frac{q}{p^2} < 2 - \sqrt{2},$$

condition qui a été indiquée par M. Gerono.

On peut montrer que si la condition $q - \frac{3}{4}p^2 < 0$ n'est pas satisfaite, les valeurs successives que l'on obtient doivent, dans le voisinage de la racine x', s'écarter de plus en plus de cette racine. En effet, lorsque $q - \frac{3}{4}p^2 > 0$, les racines

$$X_1 = \frac{p}{2} - \sqrt{q - \frac{3}{4}p^2}, \quad X_2 = \frac{p}{2} + \sqrt{q - \frac{3}{4}p^2}$$

de l'équation

$$X^2 - pX - q + p^2 = 0$$

étant réelles, la fonction $\frac{x_{n+1} + x_n}{p}$ sera supérieure à l'unité pour x_n compris entre X_1 et X_2 et inférieure à 1 lorsque x_n sera moindre que X_1 ou plus grand que X_2.

Cela posé, considérons les valeurs de x pour lesquelles la fonction $\frac{q}{p} - \frac{x^2}{p}$ est positive; ce sont les seules qui intéressent, puisque la racine est positive. Elles sont moindres que $\sqrt{q}$. Supposons X_1 positif, et par suite

$p^2 > q$. On aura

$$X_1 < x' < X_2 < \sqrt{q}.$$

Pour $x = X_1$, la fonction $\frac{p}{q} - \frac{x^2}{p}$ acquiert la valeur X_2, et pour $x = X_2$ elle est égale à X_1; d'ailleurs on a l'identité

$$x' = \frac{q}{p} - \frac{x'^2}{p}.$$

1° La fonction $\frac{q}{p} - \frac{x}{p}$ étant décroissante lorsque x croît de o à ∞, puisque sa dérivée est alors négative, pour x compris entre X_1 et x', elle acquerra une valeur comprise entre x' et X_2; et, pour x intermédiaire entre x' et X_2, elle prendra une valeur située entre x' et X_1. Il en résulte que si l'on prend une valeur initiale comprise entre X_1 et X_2, la condition $\frac{x_{n+1} + x_n}{p} > 1$ étant remplie, et par conséquent aussi la condition $\frac{x_{n+1} + x_n}{p} > 0$, les différences successives $x_{n+1} - x_n$, $x_{n+2} - x_{n+1}\ldots$, seront alternativement de signes contraires, mais leurs valeurs absolues iront en croissant. Les valeurs successives qui sont supérieures à x' s'éloigneront donc de x', et il en est de même des valeurs inférieures. Les valeurs obtenues pour les différences $x_{n+1} - x_n,\ldots$, sont toujours moindres que $X_2 - X_1$, c'est-à-dire moindres que $2\sqrt{q - \frac{3}{4}p^2}$. Mais comme une valeur peu différente de X_1 donne une valeur qui diffère peu de X_2, il en résulte que les différences des valeurs successives que l'on obtient étant prises en valeurs absolues tendent vers $2\sqrt{q - \frac{3}{4}p^2}$.

2° Si l'on donne à x une valeur comprise entre o et X_1, la fonction $\frac{q}{p} - \frac{x^2}{p}$ prendra une valeur située entre $\frac{q}{p}$ et X_2; si x est intermédiaire entre X_2 et $\sqrt{q}$, la valeur de la fonction sera comprise entre X_1 et o; d'ailleurs que x soit compris entre o et X_1 ou bien entre X_2 et $\sqrt{q}$, la condition $\frac{x_{n+1} + x_n}{p} > 0$ est satisfaite; donc si on prend une valeur initiale située entre o et X_1, ou bien entre X_1 et $\sqrt{q}$, les différences successives sont $x_{n+1} - x_n$, $x_{n+2} - x_{n+1}, \ldots$, seront de signes contraires et leurs valeurs absolues iront en décroissant. Les valeurs supérieures à x' décroîtront donc, et les valeurs inférieures iront en croissant; mais ces valeurs ne tendront pas indéfiniment vers la racine x', leurs limites respectives sont X_2 et X_1.

Les réflexions qui précèdent préviennent une erreur que l'on serait porté à commettre par suite d'un examen insuffisant des valeurs successivement obtenues lorsque $p^2 > q > \frac{3}{4}p^2$. Si dans ce cas on part de la valeur $\frac{q}{p}$, on obtient une série de valeurs qui se rapprochent de la racine x, mais qui ne tendent pas indéfiniment vers cette racine.

Supposons X_1 négatif; alors $p^2 < q$, on aura

$$X_1 < x' < \sqrt{q} < X_2;$$

les valeurs qui rendent la fonction $\frac{q}{p} - \frac{x^2}{p}$ positive étant toutes comprises entre X_1 et X_2, il s'ensuit que pour toute valeur de départ donnant une suite de valeurs positives, les différences $x_{n+1} - x_n, \ldots$, iront en augmentant en valeurs absolues, et par conséquent les valeurs obtenues s'éloigneront de plus en plus de la racine x'.

VI.

Application de la même théorie à l'équation du troisième degré.

Nous supposons d'abord les racines réelles. Alors p est négatif et $4p^3 + 27q^2 < 0$. Nous mettrons donc l'équation sous la forme $x^3 - px + q = 0$. On en tire

$$x = \frac{q}{p} + \frac{x^3}{p}.$$

La dérivée du second membre est $\frac{3x^2}{p}$; elle est donc positive pour toute valeur de x. Pour qu'elle soit plus petite que l'unité, x doit être compris entre les racines de l'équation $\frac{3x^2}{p} = 1$, c'est-à-dire entre $-\sqrt{\frac{p}{3}}$ et $+\sqrt{\frac{p}{3}}$. Or les racines de l'équation proposée étant réelles sont comprises entre

$$\begin{array}{ccc} -\infty & \text{et} & -\sqrt{\frac{p}{3}}, \\ -\sqrt{\frac{p}{3}} & \text{et} & +\sqrt{\frac{p}{3}}, \\ +\sqrt{\frac{p}{3}} & \text{et} & +\infty. \end{array}$$

La racine qui a la plus petite valeur numérique est donc comprise entre $-\sqrt{\frac{p}{3}}$ et $+\sqrt{\frac{p}{3}}$, et les autres sont en dehors de ces limites. Il en résulte que la forme donnée à l'équation ne permet que le calcul de la racine qui a la plus petite valeur numérique. Les signes de la fonction $x^3 - px + q$, pour $x = -\sqrt{\frac{p}{3}}$, $x = +\sqrt{\frac{p}{3}}$, étant respectivement $+$ et $-$, et son signe pour $x = 0$ étant celui de q, on voit que, si $q > 0$, la racine est positive, si $q < 0$, la racine est négative : elle est donc de même signe que q. Or on a $\frac{q}{p}$ moindre en valeur absolue que $\sqrt{\frac{p}{3}}$; donc $\frac{q}{p}$ est une valeur de départ.

Supposons que, p étant négatif, l'équation ait deux racines imaginaires. Alors la racine réelle est de signe contraire à q. Si q est positif, la substitution de $-\sqrt{\frac{p}{3}}$ dans l'équation donnant un résultat positif, la racine qui est négative est inférieure à $-\sqrt{\frac{p}{3}}$. Si q est négatif, la substitution de $\sqrt{\frac{p}{3}}$ donne un résultat négatif; la racine qui est positive est donc plus grande que $\sqrt{\frac{p}{3}}$. La forme particulière donnée à l'équation ne permet donc pas le calcul de la racine réelle.

Si p est positif, l'équation, en supposant q négatif, devient $x^3 + px - q = 0$. On en déduit $x = \frac{q}{p} - \frac{x^3}{p}$. La dérivée du second membre est négative, quel que soit x; pour qu'elle soit supérieure à -1, il faut que x soit compris entre $-\sqrt{\frac{p}{3}}$ et $+\sqrt{\frac{p}{3}}$; q étant négatif, la racine réelle est positive; elle ne sera inférieure à $+\sqrt{\frac{p}{3}}$ qu'autant que l'on aura $\frac{q^2}{p^3} < \frac{16}{27}$. Donc lorsque p est positif, la méthode n'est applicable à la forme $x = \frac{q}{p} - \frac{x^3}{p}$ que dans le cas où $\frac{q^2}{p^3} < \frac{16}{27}$.

Si on pose $-\frac{3x^2}{p} = -\frac{27q^2}{16p^3}$, la valeur positive $x_1 = \frac{3q}{4p}$ que l'on en tire pour x rendra la dérivée plus grande que -1, et s'il en est de même de la valeur $x_2 = \frac{q}{p} - \frac{27q^3}{64p^4}$ que fournit x_1, on pourra prendre x_1 pour valeur de départ. En effet, l'une des quantités x_1, x_2 sera nécessairement comprise dans le plus petit des deux intervalles $\alpha \ldots L$, $L' \ldots \alpha$ signalés au § IV. Voyons donc si l'inégalité

$$\frac{q}{p} - \frac{27q^3}{64p^4} < \sqrt{\frac{p}{3}},$$

laquelle revient à

$$3.64^2 q^2 p^6 + 3.27^2 q^6 < 64^2 p^9 + 2\ 3\ 27\, q^4 p^3,$$

est vérifiée.

Or si $\frac{q^2}{p^3} = \frac{16}{27}$, on a $x_1 = \frac{3q}{4p} = \sqrt{\frac{p}{3}} = x_2 = x'$, x' étant la racine réelle de l'équation $x^3 + px - q = 0$. La première inégalité, et par suite la seconde, se transforment dans cette hypothèse en une égalité. Si $\frac{q^2}{p^3} < \frac{16}{27}$, le premier membre de la deuxième inégalité prend une valeur inférieure à celle qu'il a pour $\frac{q^2}{p^3} = \frac{16}{27}$; le second membre au contraire prend une valeur plus grande: donc l'inégalité est évidente. Par suite $x_1 = \frac{3q}{4p}$ est une valeur de départ.

La quantité $\frac{q}{p}$ qui, dans le premier cas, a servi de valeur de départ, ne jouit pas dans celui-ci de la propriété de rendre toujours la dérivée plus grande que -1.

VII.

Par les exemples qui précèdent, on voit que la forme

$$x = \varphi(x)$$

donnée à l'équation $F(x) = 0$ ne permet pas le calcul approché de toutes les racines. Nous allons montrer que l'on peut toujours, par la méthode des substitutions successives, calculer toutes les racines de l'équation

$$F(x) = 0,$$

à la condition de savoir trouver la fonction $x = \psi(y)$ inverse de $y = \varphi(x)$.

En effet, admettons que l'on sache trouver cette fonction inverse. On pourra mettre l'équation $F(x) = 0$ ou $x = \varphi(x)$ sous la forme $x = \psi(x)$. Mais, d'après la nature des fonctions $x = \psi(y)$, $y = \varphi(x)$, on a

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\psi'(y)},$$

x, y étant deux valeurs correspondantes. Or, lorsque x est égal à une racine β de l'équation $F(x) = 0$, $x = y = (\beta)$; donc $\varphi'(\beta) = \frac{1}{\psi'(\beta)}$. Par suite, si, pour une racine β, $\varphi'(\beta)$ est en dehors de l'intervalle $-\ldots+1$, pour cette même valeur $\psi'(\beta)$ sera compris entre -1 et $+1$. Donc la forme $x = \psi(x)$ permet le calcul de la racine β, qui échappe à la relation $x = \varphi(x)$.

Si on applique ces considérations aux équations du deuxième et du troisième degré, on trouvera

$$x = \sqrt{-px-q}, \quad x = \sqrt[3]{-px-q}$$

pour formes inverses de

$$x = -\frac{q}{p} - \frac{x^2}{p}, \quad x = -\frac{q}{p} - \frac{x^3}{p};$$

et, par conséquent, les deux premières expressions fourniront les racines que ne donnent pas les deux dernières.

VIII.

Supposons actuellement que l'équation

$$F(x) = 0$$

ne puisse être mise que sous la forme $\psi(x) = \varphi(x)$.

On peut toujours regarder le x du premier membre comme une fonction explicite de $\varphi(x)$ et poser

$$x = \xi[\varphi(x)].$$

Dès lors, si, pour une racine α, $\xi'[\varphi(\alpha)].\varphi'(\alpha)$ était compris entre — et + 1, on pourrait déterminer α par les calculs suivants :

$$x_2 = \xi[\varphi(x_1)],$$
$$x_3 = \xi[\varphi(x_2)],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Or la forme explicite $\xi[\varphi(x)]$ n'étant pas connue, par hypothèse, on ne pourra déterminer les quantités $x_2, x_3, \ldots$ que par la résolution des équations

$$\psi(x) = \varphi(x_1), \quad \psi(x) = \varphi(x_2), \ldots,$$

La méthode ne sera donc réellement applicable à la détermination de la racine α qu'autant que l'on pourra, à l'aide de tables, calculer la valeur de x qui fait acquérir à $\psi(x)$ une valeur donnée.

En supposant qu'il en soit ainsi, il reste à faire voir comment on pourra reconnaître que $\xi'[\varphi(\alpha)].\varphi'(\alpha)$ est compris entre — 1 et + 1. $\xi'[\varphi(x)].\varphi'(x)$ est la dérivée u' de la fonction u définie par $u = \xi[\varphi(x)]$, ou encore par $\psi(u) = \varphi(x)$. Or, en différentiant les deux membres de cette dernière équation, on a

$$\psi'(u).u' = \varphi'(x),$$

d'où

$$u' = \frac{\varphi'(x)}{\psi'(u)};$$

par suite

$$\xi'[\varphi(x)].\varphi'(x) = \frac{\varphi'(x)}{\psi'(u)}.$$

Dès lors les procédés ordinaires qui, à l'aide de la fonction $\xi'[\varphi(x)].\varphi'(x)$ permettent de reconnaître que $\xi'[\varphi(\alpha)].\varphi'(\alpha)$ est comprise entre -1 et $+1$, pourront s'appliquer à la fonction $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(u)}$, puisque u est numériquement connu par les tables.

Si l'on remarque que, pour $x = \alpha$, u est aussi égal à α, on aura

$$\xi'[\varphi(\alpha)].\varphi'(\alpha) = \frac{\varphi'(\alpha)}{\psi'(\alpha)},$$

et par conséquent si, pour une certaine racine α, la fraction $\frac{\varphi'(\alpha)}{\psi'(\alpha)}$ n'était pas intermédiaire entre -1 et $+1$, la fraction inverse $\frac{\psi'(\alpha)}{\varphi'(\alpha)}$ jouirait au contraire de cette propriété. Il en résulte qu'en supposant la résolution de l'équation $\varphi(x) = A$ possible à l'aide des tables, la racine α pourra être calculée à l'aide des opérations suivantes :

$$\varphi(x_2) = \psi(x_1),$$
$$\varphi(x_3) = \psi(x_2),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

(*Fin.*)