PAINVIN

Mémoire sur les tétraèdres. Détermination du volume maximum d'un tétraèdre dont les faces ont des aires données

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 353-366

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__353_0>

MÉMOIRE SUR LES TÉTRAÈDRES.

Détermination du volume maximum d'un tétraèdre dont les faces ont des aires données

(voir p. 267);

PAR M. PAINVIN.

Présenté à l'Académie en janvier 1862.

16. L'équation (10) peut s'écrire :

$$(11)\left\{\begin{aligned}&\theta[(\theta+f_1)^2(\theta+f_2)^2+(\theta+f_1)^2(\theta+f_3)^2+(\theta+f_2)^2(\theta+f_3)^2]\\&-(\theta+f_1)(\theta+f_2)(\theta+f_3)[3\theta^2+2(c-f)\theta+c^2]=0,\end{aligned}\right.$$

ou, en développant les quantités entre parenthèses,

$$(12)\left\{\begin{aligned}&\theta\left\{\begin{aligned}&3\theta^4+4(f_1+f_2+f_3)\theta^3+2(f_1+f_2+f_3)^2\theta^2\\&+2[(f_1+f_2+f_3)(f_1f_2+f_1f_3+f_2f_3)-3f_1f_2f_3]\theta\\&+f_1^2f_2^2+f_1^2f_3^2+f_2^2f_3^2\end{aligned}\right\}\\&-[\theta^3+(f_1+f_2+f_3)\theta^2+(f_1f_2+f_1f_3+f_2f_3)\theta+f_1f_2f_3]\\&\times[3\theta^2+2(c-f)\theta+c^2]\end{aligned}\right\}=0.$$

On voit d'abord que cette équation se réduit au quatrième degré.

On peut supposer, comme je l'ai déjà dit, que l'origine choisie est au sommet opposé à la plus petite face, et admettre les inégalités

$$(13)\qquad f<f_1<f_2<f_3.$$

Par suite de la définition de θ (relations 6), les racines positives de l'équation (11) peuvent seules convenir à la question; cherchons donc le nombre des racines positives de cette équation.

17. Rappelons la définition de la quantité c

$$2c = f_1 + f_2 + f_3 - f.$$

On trouve immédiatement que le coefficient de θ^4 et le terme indépendant sont respectivement $3f$ et $-c^2 f_1 f_2 f_3$; or les quantités f, f_1, f_2, f_3, c sont essentiellement positives; donc l'équation (11) admet au moins une racine réelle positive.

Cette équation étant écrite sous la forme

$$(14) \qquad 3f\theta^4 + P_1\theta^3 - P_2\theta^2 - P_3\theta - c^2 f_1 f_2 f_3 = 0,$$

on trouve les valeurs suivantes pour les coefficients P_1, P_2, P_3 :

$$(15)\left\{\begin{aligned}
4P_3 &= \left\{\begin{aligned}
&f_1 f_2[(f_1 - f_2)^2 + f(f - f_3)]\\
&+ f_1 f_3[(f_1 - f_3)^2 + f(f - f_2)]\\
&+ f_2 f_3[(f_2 - f_3)^2 + f(f - f_1)]\\
&+ 2(f_1 + f_2 + f_3)[3f_1 f_2 f_3 - f(f_1 f_2 + f_1 f_3 + f_2 f_3)]\\
&+ 3f_1 f_2 f_3[f_1 + f_2 + f_3 - 3f]
\end{aligned}\right\},\\
4P_2 &= \left\{\begin{aligned}
&(f_1 + f_2 + f_3)\begin{bmatrix} f^2 + f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 \\ -2(ff_1 + ff_2 + ff_3 + f_1 f_2 + f_1 f_3 + f_2 f_3)\end{bmatrix}\\
&+ 12[f_1 f_2 f_3 - f(f_1 f_2 + f_1 f_3 + f_2 f_3)]
\end{aligned}\right\},\\
4P_1 &= \left\{\begin{aligned}
&3\begin{bmatrix} f^2 + f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 \\ -2(ff_1 + ff_2 + ff_3 + f_1 f_2 + f_1 f_3 + f_2 f_3)\end{bmatrix}\\
&+ 4[5f(f_1 + f_2 + f_3) - f^2]
\end{aligned}\right\}.
\end{aligned}\right.$$

18. Je dis d'abord que P_3 est positif; il suffit, pour s'en convaincre, de poser

$$(16) \qquad \left\{\begin{aligned} f_1 &= f + \varphi_1,\\ f_2 &= f + \varphi_2,\\ f_3 &= f + \varphi_3, \end{aligned}\right.$$

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, sont des quantités positives, puisque f est la plus petite des faces; on trouve alors que $4P_3$ prend la forme :

$$
(17)\ 4P_3 = \left\{ \begin{array}{l}
8(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)f^3 + \left[\begin{array}{c} 7(\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2) \\ +18(\varphi_2\varphi_1+\varphi_1\varphi_3+\varphi_2\varphi_3) \end{array} \right] f^2 \\
+\left[2(\varphi_1^3+\varphi_2^3+\varphi_3^3)+6\left(\begin{array}{c} \varphi_1^2\varphi_2+\varphi_1^2\varphi_3+\varphi_2^2\varphi_1 \\ +\varphi_2^2\varphi_3+36\varphi_1\varphi_2\varphi_3 \\ +\varphi_3^2\varphi_1+\varphi_3^2\varphi_2 \end{array} \right) \right] f \\
+\varphi_1\varphi_2(\varphi_1-\varphi_2)^2+\varphi_1\varphi_3(\varphi_1-\varphi_3)^2 \\
+\varphi_2\varphi_3(\varphi_2-\varphi_3)^2+9(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)\varphi_1\varphi_2\varphi_3
\end{array} \right\},
$$

quantité évidemment positive.

19. Maintenant multiplions la valeur de $4P_2$ par 4, celle de $4P_1$ par $(f_1+f_2+f_3)$, et ajoutons; on trouve

$$
(18)\qquad 16P_2+4(f_1+f_2+f_3)P_1
$$

$$
= \left\{ \begin{array}{l}
(f_1+f_2+f_3)\left[\begin{array}{l} 3f^2+6f(f_1+f_2+f_3) \\ +7(f_1^2+f_2^2+f_3^2) \\ -14(f_1f_2+f_1f_3+f_2f_3) \end{array} \right] \\
+48[3f_1f_2f_3-f(f_1f_2+f_1f_3+f_2f_3)]
\end{array} \right\}.
$$

Si l'on fait usage des relations (16), le second membre de l'égalité (18) se réduit à

$$
\left\{ \begin{array}{l}
24(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)f^2 \\
+[13(\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2)+38(\varphi_1\varphi_2+\varphi_1\varphi_3+\varphi_2\varphi_3)]f \\
+\left\{ \begin{array}{c} 7(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3) \\ \times[\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2-2(\varphi_1\varphi_2+\varphi_1\varphi_3+\varphi_2\varphi_3)]+144\varphi_1\varphi_2\varphi_3 \end{array} \right\}
\end{array} \right\};
$$

les deux premiers termes sont évidemment positifs; nous allons vérifier qu'il en est de même pour la quantité qui occupe la seconde ligne.

D'après les inégalités admises (13), $\varphi_3 > \varphi_2 > \varphi_1$, on peut donc poser

$$
\left\{ \begin{array}{l} \varphi_2 = \varphi_1+\lambda, \\ \varphi_3 = \varphi_1+\mu; \end{array} \right.
$$

la quantité en question se présente alors sous la forme

$$102\varphi_1^3 + 95(\lambda+\mu)\varphi_1^2 + 88\lambda\mu\varphi_1 + 7(\lambda+\mu)(\lambda-\mu)^2;$$

quantité visiblement positive.

Nous sommes ainsi conduits à la conclusion suivante :

$$(19)\qquad 4P_2 + (f_1+f_2+f_3)P_1 = \text{quantité positive.}$$

Or si P_1 est une quantité positive, l'équation (14), quel que soit le signe de P_2, ne possède qu'une variation; si P_1 est négatif, P_2 devra nécessairement être positif en vertu de l'égalité précédente, et l'équation (14) ne possède encore qu'une variation.

Donc *l'équation* (11) *a nécessairement une racine réelle positive et n'en a qu'une.*

Ainsi le volume du tétraèdre n'est susceptible que d'une seule valeur ou maximum ou minimum.

20. Mais à la racine réelle de l'équation (11) correspond-il toujours un tétraèdre réel? et, dans le cas où il est réel, ce volume est-il un maximum ou un minimum?

Pour répondre à ces questions, étudions les valeurs des dièdres correspondant à l'unique racine réelle positive de l'équation (11); ces valeurs sont données par les équations (8).

Je remarque d'abord que

$$r_1^2 > \sqrt{\theta},\quad r_2^2 > \sqrt{\theta};$$

car, pour que la première inégalité soit vraie, il faut que

$$r_1^4 > \theta,\quad \text{ou}\quad \frac{(\theta+f_2)(\theta+f_3)}{\theta+f_1} > \theta$$

ou

$$\theta(f_2+f_3-f_1) + f_2 f_3 > 0,$$

ce qui est exact d'après les inégalités (13); donc *les* *cosinus* cos $(A_2 A_3)$, cos $(A_1 A_3)$ *sont négatifs; et, par suite, les dièdres correspondants sont aigus* (7).

21. Constatons maintenant que ces dièdres sont réels; il faut et il suffit, pour cela, que la valeur absolue des cosinus soit inférieure à l'unité; on doit donc avoir

$$\frac{\sqrt{\theta}(r_1^2 - \sqrt{\theta})}{\sqrt{f_2 f_3}} < 1 \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{\theta}(r_2^2 - \sqrt{\theta})}{\sqrt{f_1 f_3}} < 1;$$

ces deux conditions, en ayant égard aux valeurs (7), se réduisent à la forme suivante :

$$(20)\quad \left\{\begin{array}{l} \quad \theta^2(\sqrt{f_3} - \sqrt{f_2} - \sqrt{f_1})(\sqrt{f_3} - \sqrt{f_2} + \sqrt{f_1}) \\ - 2f_1\sqrt{f_2 f_3}\,.\,\theta - f_1 f_2 f_3 < 0; \\ \quad \theta^2(\sqrt{f_3} - \sqrt{f_2} - \sqrt{f_1})(\sqrt{f_3} + \sqrt{f_2} - \sqrt{f_1}) \\ - 2f_2\sqrt{f_1 f_3}\,.\,\theta - f_1 f_2 f_3 < 0; \end{array}\right.$$

or ces inégalités sont vérifiées tant que

$$\sqrt{f_3} < \sqrt{f_1} + \sqrt{f_2}.$$

22. Supposons alors

$$(21)\qquad \sqrt{f_3} > \sqrt{f_1} + \sqrt{f_2};$$

les deux racines des équations, obtenues en égalant à zéro les premiers membres des inégalités (20), sont de signes contraires; la racine positive a pour les deux la même valeur, et cette valeur commune est

$$(22)\qquad \theta_1 = \frac{\sqrt{f_1 f_2 f_3}}{\sqrt{f_3} - \sqrt{f_1} - \sqrt{f_2}};$$

il faut donc, pour que ces inégalités soient vérifiées, que la racine θ de l'équation (11) soit inférieure à la racine commune θ_1, c'est-à-dire qu'on doit avoir

$$(23)\qquad \theta < \theta_1.$$

Observons d'abord que les grandeurs des quantités f, f_1, f_2, f_3, ne sont pas complétement arbitraires; car la troisième des égalités (17, § II), nous donne

$$(24)\qquad \sqrt{f_3} < \sqrt{f} + \sqrt{f_1} + \sqrt{f_2},$$

relation d'ailleurs évidente *à priori*.

Posons donc

$$(25)\qquad \sqrt{f_3} - \sqrt{f_1} - \sqrt{f_2} = \mathrm{K},$$

K est une quantité positive d'après l'hypothèse (21), et, en outre, inférieure ou au plus égale à $\sqrt{f}$, d'après l'inégalité (24).

Nous allons substituer, dans le premier membre de l'équation (11), la valeur de θ_1, et constater que le résultat de cette substitution est *positif*, ce qui démontrera l'inégalité (23).

23. Nous dirigerons comme il suit le calcul de cette vérification :

$$(26)\qquad \begin{cases} \sqrt{f_3} = \mathrm{K} + \sqrt{f_1} + \sqrt{f_2} \quad \text{d'après (25)} \\ \text{et} \quad \theta_1 = \dfrac{\sqrt{f_1 f_2 f_3}}{\mathrm{K}}, \end{cases}$$

$$(27)\qquad \begin{cases} \theta_1 + f_1 = \dfrac{\sqrt{f_1}\left(\sqrt{f_1} + \sqrt{f_2}\right)\left(\mathrm{K} + \sqrt{f_2}\right)}{\mathrm{K}}, \\ \theta_1 + f_2 = \dfrac{\sqrt{f_2}\left(\sqrt{f_1} + \sqrt{f_2}\right)\left(\mathrm{K} + \sqrt{f_1}\right)}{\mathrm{K}}, \\ \theta_1 + f_3 = \dfrac{\sqrt{f_3}}{\mathrm{K}}\left(\mathrm{K} + \sqrt{f_1}\right)\left(\mathrm{K} + \sqrt{f_2}\right), \end{cases}$$

d'où

$$(\theta_1+f_1)(\theta_1+f_2)=\frac{\sqrt{f_1 f_2}(\sqrt{f_1}+\sqrt{f_2})^2}{K\sqrt{f_3}}(\theta_1+f_3).$$

Substituons ces valeurs dans le premier membre de l'équation (11), supprimons le facteur positif commun qui se trouve en évidence, et désignons par Θ_1 le résultat ainsi obtenu; on trouve, après avoir posé

$$(28)\qquad \sqrt{f_1}+\sqrt{f_2}=A, \quad \sqrt{f_1 f_2}=B,$$

$$\Theta_1=(f-K^2)[K^3+4AK^2+4(A^2+2B)K+12AB]$$
$$-fK(f-K^2),$$

expression qu'on peut écrire ainsi :

$$\Theta_1=(f-K^2)[K^3+4AK^2+(4A^2+8B-f)K+12AB].$$

Or K est une quantité positive et inférieure ou au plus égale à $\sqrt{f}$; de plus la quantité $(4A^2+8B)$ est évidemment supérieure à f; donc Θ_1 est *positif*. L'inégalité (23) est donc vérifiée; par conséquent *les dièdres* $\widehat{A_2 A_3}$, $\widehat{A_1 A_3}$, *correspondant à la racine* θ *sont toujours réels;* ces deux dièdres sont adjacents à la face $OM_1 M_2$.

24. Ainsi, il est démontré que les dièdres OM_1, OM_2, sont réels; les arêtes r_1, r_2, r_3, sont visiblement réelles; on constate aisément que les angles $\widehat{r_1 r_2}$, $\widehat{r_1 r_3}$, $\widehat{r_2 r_3}$, sont aussi réels. Donc on a dans le tétraèdre $OM_1 M_2 M_3$ trois faces réelles $OM_1 M_2$, $OM_1 M_3$, $OM_2 M_3$; et deux dièdres adjacents à l'une d'elles et correspondant au sommet O; par suite *le tétraèdre correspondant à la racine positive* θ *est réel.*

25. J'ajouterai maintenant que le tétraèdre acquiert, pour cette valeur θ, un volume maximum.

Le groupe (III) du § II nous donne en effet

$$(29)\quad \lambda^4 = f_1 f_2 f_3 \begin{vmatrix} 1 & \cos(A_1A_2) & \cos(A_1A_3) \\ \cos(A_2A_1) & 1 & \cos(A_2A_3) \\ \cos(A_3A_1) & \cos(A_3A_2) & 1 \end{vmatrix}$$

et les cosinus qui entrent dans cette expression, sont en outre liés par la relation

$$(30)\quad \sqrt{f_1f_2}\cos(A_1A_2) + \sqrt{f_1f_3}\cos(A_1A_3) + \sqrt{f_2f_3}\cos(A_2A_3) = -c.$$

Nous pouvons regarder λ^4 comme une fonction des deux variables indépendantes $\cos(A_2A_3) = \alpha_1$, $\cos(A_1A_3) = \alpha_2$; et, puisqu'aux environs du maximum ou du minimum α_1 et α_2 sont des quantités négatives, on peut, pour décider la question, n'étudier les variations de λ^4 que lorsque α_1 et α_2 varient toutes deux de 0 à -1. Or

pour $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, λ^4 est négatif;

pour $\alpha_1 = \alpha_2 = -1$, λ^4 est encore négatif;

mais, comme nous savons d'ailleurs que, pour les valeurs négatives de α_1, α_2, correspondant à la valeur maximum ou minimum, λ^4 est positif, et qu'en outre il n'y a ou qu'un maximum ou qu'un minimum, on voit que, lorsque α_1 et α_2 prendront toutes les valeurs possibles de 0 à -1, la quantité λ^4, d'abord négative, s'annulera pour certaines valeurs de α_1 et α_2, deviendra ensuite positive, s'annulera encore, et redeviendra enfin négative; donc le volume passe par un maximum. Ainsi,

Parmi les tétraèdres dont les aires des faces sont données, il y en a toujours un, et un seul, dont le volume est un maximum. [Les aires doivent, bien entendu, vérifier l'inégalité (24).]

Il me semble que la question, au point de vue analytique, se trouve complétement élucidée. Il nous reste à signaler plusieurs des propriétés géométriques que possède le tétraèdre de volume maximum. Les groupes de formules établies à la fin du § II, n^{os} 9, 10, 11, 12, 13, nous seront très-utiles pour cette recherche.

§ IV. — *Propriétés du tétraèdre maximum.*

26. Introduisons dans les formules qui viennent d'être citées l'hypothèse particulière

$$(1)\qquad r_1 r_2 \cos(r_1 r_2) = r_1 r_3 \cos(r_1 r_3) = r_2 r_3 \cos(r_2 r_3) = \sqrt{\theta}$$

et posons toujours

$$(2)\qquad 2c = f_1 + f_2 + f_3 - f,$$

on trouve d'abord les valeurs suivantes, déjà employées :

$$(3)\qquad \begin{cases} \sqrt{f_2 f_3}\cos(A_2 A_3) = \theta - r_1^2\sqrt{\theta}, \\ \sqrt{f_3 f_1}\cos(A_1 A_3) = \theta - r_2^2\sqrt{\theta}, \\ \sqrt{f_1 f_2}\cos(A_1 A_2) = \theta - r_3^2\sqrt{\theta}, \\ r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 3\sqrt{\theta} + \dfrac{c}{\sqrt{\theta}}. \end{cases}$$

Les trois premières relations du groupe (VI) deviennent

$$(4)\qquad \begin{cases} \rho_1^2 = r_2^2 + r_3^2 - 2\sqrt{\theta}, \\ \rho_2^2 = r_3^2 + r_1^2 - 2\sqrt{\theta}, \\ \rho_3^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2\sqrt{\theta}. \end{cases}$$

Les égalités suivantes du même groupe donnent alors

$$(5)\qquad \begin{cases} \rho_2\rho_3\cos(\rho_2\rho_3) = r_1\rho_3\cos(r_1\rho_3) = r_1\rho_2\cos(r_1\rho_2) = r_1^2 - \sqrt{\theta}, \\ \rho_1\rho_3\cos(\rho_1\rho_3) = r_2\rho_1\cos(r_2\rho_1) = r_2\rho_3\cos(r_2\rho_3) = r_2^2 - \sqrt{\theta}, \\ \rho_1\rho_2\cos(\rho_1\rho_2) = r_3\rho_1\cos(r_3\rho_1) = r_3\rho_2\cos(r_3\rho_2) = r_3^2 - \sqrt{\theta}. \end{cases}$$

Les relations (5), rapprochées des relations (1), nous conduisent au théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Le produit de deux arêtes quelconques correspondant à un même sommet par le cosinus de l'angle compris est constant pour un même sommet.*

Et comme les égalités (1) et (5) peuvent encore s'écrire

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\sqrt{f_1}}{\tang(r_2 r_3)} = \dfrac{\sqrt{f_2}}{\tang(r_1 r_3)} = \dfrac{\sqrt{f_3}}{\tang(r_1 r_2)} = \sqrt{\theta}, \\ \dfrac{\sqrt{f}}{\tang(\rho_2 \rho_3)} = \dfrac{\sqrt{f_2}}{\tang(r_1 \rho_2)} = \dfrac{\sqrt{f_3}}{\tang(r_1 \rho_3)} = r_1^2 - \sqrt{\theta}, \\ \dfrac{\sqrt{f}}{\tang(\rho_1 \rho_3)} = \dfrac{\sqrt{f_3}}{\tang(r_2 \rho_3)} = \dfrac{\sqrt{f_1}}{\tang(r_2 \rho_1)} = r_2^2 - \sqrt{\theta}, \\ \dfrac{\sqrt{f}}{\tang(\rho_1 \rho_2)} = \dfrac{\sqrt{f_2}}{\tang(r_3 \rho_2)} = \dfrac{\sqrt{f_1}}{\tang(r_3 \rho_1)} = r_3^2 - \sqrt{\theta}, \end{array}\right.$$

on peut substituer au premier énoncé le suivant :

Les tangentes des angles correspondant à un même sommet sont respectivement proportionnelles aux aires des faces qui forment ce sommet.

27. Le groupe (IV) nous donne

$$(7)\qquad \cos(r_1 \rho_1) = \cos(r_2 \rho_2) = \cos(r_3 \rho_3) = 0,$$

c'est-à-dire :

THÉORÈME II. — *Les arêtes du tétraèdre maximum sont perpendiculaires entre elles.*

C'est une propriété fondamentale qui rattache ce tétraèdre à des tétraèdres déjà étudiés.

Les relations du groupe (VI), la première par exemple, nous donnent

$$r_1^2 + \rho_1^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 - 2\sqrt{\theta} = \sqrt{\theta} + \frac{c}{\sqrt{\theta}};$$

d'où nous concluons

$$(8)\qquad r_1^2+\rho_1^2=r_2^2+\rho_2^2=r_3^2+\rho_3^2=\sqrt{\theta}+\frac{c}{\sqrt{\theta}},$$

ou, en langage ordinaire,

THÉORÈME III. — *La somme des carrés des arêtes opposées est constante.*

28. La perpendiculaire abaissée du point M_1 sur la face OM_2M_3 a pour équations

$$\frac{x-x_1}{X_1}=\frac{y-y_1}{Y_1}=\frac{z-z_1}{Z_1}=K_1;$$

d'où

$$x=x_1+K_1X_1,\quad y=y_1+K_1Y_1,\quad z=z_1+K_1Z_1;$$

multiplions successivement par x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3, et opérons de même pour les autres sommets; on a :

Pour la hauteur correspondant

au sommet M_1.... $\begin{cases} xx_2+yy_2+zz_2=r_1r_2\cos(r_1r_2),\\ xx_3+yy_3+zz_3=r_1r_3\cos(r_1r_3);\end{cases}$

au sommet M_2.... $\begin{cases} xx_3+yy_3+zz_3=r_2r_3\cos(r_2r_3),\\ xx_1+yy_1+zz_1=r_2r_1\cos(r_2r_1);\end{cases}$

au sommet M_3.... $\begin{cases} xx_1+yy_1+zz_1=r_3r_1\cos(r_3r_1),\\ xx_2+yy_2+zz_2=r_3r_2\cos(r_3r_2);\end{cases}$

au sommet O..... $\begin{cases} x(x_1-x_2)+y(y_1-y_2)+z(z_1-z_2)=0,\\ x(x_1-x_3)+y(y_1-y_3)+z(z_1-z_3)=0.\end{cases}$

Si nous considérons, par exemple, les hauteurs relatives aux sommets M_1 et M_2, on voit que les deux plans

$$xx_3+yy_3+zz_3=r_1r_3\cos(r_1r_3),$$
$$xx_3+yy_3+zz_3=r_2r_3\cos(r_2r_3),$$

se confondent, eu égard aux relations (1); par suite ces deux droites sont concourantes.

Les coordonnées du point de concours des hauteurs correspondant aux sommets M_1 et M_2 sont :

$$\begin{aligned}
\lambda x &= a_{12} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3,\\
\lambda y &= a_{12} Y_1 + a_{12} Y_2 + a_{13} Y_3,\\
\lambda z &= a_{12} Z_1 + a_{12} Z_2 + a_{13} Z_3.
\end{aligned}$$

Or, en vertu des égalités (1), ces valeurs vérifient les équations qui déterminent les hauteurs correspondant aux sommets M_3 et O; donc :

THÉORÈME IV. — *Les hauteurs du tétraèdre maximum sont concourantes.*

Cette propriété est une conséquence de celle qui est énoncée dans le théorème II.

29. En combinant convenablement les égalités du groupe (VI) et en ayant égard aux valeurs (1) et (5), on arrive à

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{ll}
\text{pour le sommet O.......} & \left\{\begin{array}{l} r_1^2(r_2^2 - r_3^2) = f_3 - f_2,\\ r_2^2(r_3^2 - r_1^2) = f_1 - f_3,\\ r_3^2(r_1^2 - r_2^2) = f_2 - f_1; \end{array}\right.\\
\text{pour le sommet } M_1\text{......} & \left\{\begin{array}{l} r_1^2(\rho_2^2 - \rho_3^2) = f_2 - f_3,\\ \rho_2^2(\rho_3^2 - r_1^2) = f - f_2,\\ \rho_3^2(r_1^2 - \rho_2^2) = f_3 - f; \end{array}\right.\\
\text{pour le sommet } M_2\text{.....} & \left\{\begin{array}{l} r_2^2(\rho_3^2 - \rho_1^2) = f_3 - f_1,\\ \rho_3^2(\rho_1^2 - r_2^2) = f - f_3,\\ \rho_1^2(r_2^2 - \rho_3^2) = f_1 - f; \end{array}\right.\\
\text{pour le sommet } M_3\text{......} & \left\{\begin{array}{l} r_3^2(\rho_1^2 - \rho_2^2) = f_1 - f_2,\\ \rho_1^2(\rho_2^2 - r_3^2) = f - f_1,\\ \rho_2^2(r_3^2 - \rho_1^2) = f_2 - f. \end{array}\right.
\end{array}\right.$$

De là le théorème suivant :

THÉORÈME V. — *Le produit du carré d'une arête par la différence des carrés des arêtes appartenant au même sommet, est égal à quatre fois la différence des carrés des aires des faces adjacentes à la première arête.*

Des égalités précédentes, on conclut

$$(10)\qquad \begin{cases} r_3 < r_2 < r_1, \\ \rho_1 < \rho_2 < \rho_3, \\ \rho_2 < \rho_3 < r_1, \\ \rho_1 < \rho_2 < r_3, \\ \rho_1 < r_2 < \rho_3. \end{cases}$$

Les relations (9) nous fournissent encore les suivantes

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{f_3 - f_2}{r_1^2} + \dfrac{f_1 - f_3}{r_2^2} + \dfrac{f_2 - f_1}{r_3^2} = 0, \\[2ex] \dfrac{f_2 - f_3}{r_1^2} + \dfrac{f - f_2}{\rho_2^2} + \dfrac{f_3 - f}{\rho_3^2} = 0, \\[2ex] \dfrac{f_1 - f}{\rho_1^2} + \dfrac{f_3 - f_1}{r_2^2} + \dfrac{f - f_3}{\rho_3^2} = 0, \\[2ex] \dfrac{f - f_1}{\rho_1^2} + \dfrac{f_2 - f}{\rho_2^2} + \dfrac{f_1 - f_2}{r_3^2} = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire

THÉORÈME VI. — *La somme des quotients de la différence des carrés des faces appartenant à un même sommet par le carré de l'arête adjacente, est égale à zéro.*

On conclut aussi des mêmes relations

$$(12)\qquad r_1^2(\rho_2^2 - \rho_3^2) + r_2^2(\rho_3^2 - \rho_1^2) + r_3^2(\rho_1^2 - \rho_2^2) = 0,$$

ou, en d'autres termes :

THÉORÈME VII. — *La somme des produits des carrés* *des arêtes appartenant à un même sommet par la différence des carrés des arêtes arrivant à l'autre extrémité de l'arête considérée est égale à zéro.*

(*La suite prochainement.*)