Question 620

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 348-350

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__348_1>

QUESTION 620.

On donne une courbe du troisième ordre ayant un point double et en ce point des tangentes perpendiculaires entre elles; les hypoténuses des triangles rectangles inscrits dans cette courbe et dont les sommets de l'angle droit sont toujours au point double, passent par un même point de la courbe.

Quatre démonstrations différentes de cette proposition nous ont été adressées par MM. L. P., élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Briot), Richard, élève de la classe de spéciales de Douai, G. Halphen, élève du lycée Saint-Louis, Schnée, élève du lycée Charlemagne; nous allons donner celle de M. L. P., qui est très-simple.

J'opère en coordonnées polaires; l'origine est le point double, et l'une des tangentes l'axe polaire. En exprimant les conditions de l'énoncé, l'équation générale de la courbe est

$$(1) \quad \rho = \frac{d \sin\omega \cos\omega}{a \sin^3\omega + b \sin^2\omega \cos\omega + b' \sin\omega \cos^2\omega + c \cos^3\omega} \ (^*).$$

Je cherche l'intersection de cette courbe avec la droite quelconque

$$(2) \qquad \rho = \frac{1}{\beta \sin\omega + \beta' \cos\omega}.$$

Soient ω_1, ω_2, ω_3 les valeurs de ω correspondantes aux trois points d'intersection, elles seront données par leurs tangentes au moyen de l'équation

$$(3) \quad a \operatorname{tang}^3\omega + (b - d\beta) \operatorname{tang}^2\omega + (b' - d\beta') \operatorname{tang}\omega + c = 0,$$

obtenue en égalant les valeurs de ρ des équations (1) et (2), et divisant ensuite par $\cos^3\omega$.

Or, par hypothèse,

$$\operatorname{tang}\omega_2 \operatorname{tang}\omega_3 = -1,$$

donc

$$\operatorname{tang}\omega_1 = \frac{c}{a}.$$

(*) On voit facilement qu'en prenant pour axes de coordonnées rectilignes les deux tangentes rectangulaires au point double, l'équation de la courbe est de la forme

$$ax^3 + bxy^2 + b'x^2y + cx^3 = dxy;$$

la substitution de $\rho \sin\omega$, $\rho \cos\omega$ à y, x donne ensuite l'équation (1).

(*Note du Rédacteur.*)

En remplaçant ω_1 par sa valeur dans l'équation (1), on obtiendra évidemment pour ρ_1 une valeur constante. Le théorème est donc vrai.