H. LEBASTEUR
ABRAHAM SCHNÉE
G. BARTET

Question 624

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 345-348
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__345_1>

QUESTION 624

(voir p. 172).

Un angle trièdre trirectangle mobile a son sommet en un point fixe pris sur une surface quelconque du second ordre, le plan déterminé par les intersections de ses trois arêtes avec cette surface passe constamment par un même point de la normale issue du sommet fixe de l'angle trièdre. On demande le lieu de ce point, lorsque le sommet du trièdre parcourt la surface donnée.

SOLUTION DE M. ABRAHAM SCHNÉE,
Elève du lycée Charlemagne,

ET DE MM. G. BARTET ET H. LEBASTEUR,
Elèves du lycée Napoléon (classe de M. Vaquant).

1. Je prends pour origine le point fixe, pour plan des xy le plan tangent en ce point, et pour axes des z la normale à l'origine. L'équation de la surface est alors

$$(1)\qquad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz = 2C''z.$$

Soit

$$(2)\qquad lx + my + nz = n$$

l'équation du plan déterminé par les intersections des trois arêtes du trièdre et de la surface, je dis que l'équation

$$(3)\quad p(Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B''xz)=2C''z(lx+my+nz)$$

représente un cône ayant pour sommet l'origine et pour base l'intersection de la surface et du plan.

Car, l'équation (3) étant homogène, représente un cône dont le sommet est à l'origine, et de plus ce cône passe par l'intersection des surfaces (1) et (2), puisque l'équation (3) est vérifiée par les solutions communes aux équations (1) et (2).

Ce cône a trois génératrices rectangulaires, donc

$$(4)\qquad p(A+A'+A'')-2C''n=0\ (*)$$

ou

$$\frac{p}{n}=\frac{2C''}{A+A'+A''}.$$

D'ailleurs, en faisant $x=0$, $y=0$, dans l'équation du plan, on a

$$z=\frac{p}{n}.$$

Par conséquent, la valeur de z est constante et égale à $\frac{2C''}{A+A'+A''}$, ce qui démontre le théorème.

2. Il reste à trouver le lieu du point qui vient d'être déterminé, quand le sommet du trièdre parcourt la surface donnée. En faisant tourner le trièdre autour de son sommet, le point dont on cherche le lieu géométrique reste

(*) Quand les coordonnées sont rectangulaires, il faut pour que le cône $Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'xz+2B''xy=0$ ait trois génératrices rectangulaires, que $A+A'+A''=0$. C'est ce qu'on démontre très-simplement, en prenant pour axes de coordonnées les trois génératrices fixe ; on peut alors admettre, dans la recherche de ce lieu, que les trois arêtes du trièdre sont constamment parallèles à trois droites rectangulaires données.

En prenant pour exemple l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, on admettra que les arêtes du trièdre soient constamment parallèles aux axes de la surface.

Soient x', y', z' les coordonnées du sommet, on a

$$(1) \qquad \frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=1.$$

Les coordonnées des points où les trois arêtes percent la surface sont

$$(-x',\ y',\ z'),\quad (x',\ -y',\ z'),\quad (x',\ y',\ -z').$$

Le plan passant par ces trois points a pour équation

$$(2) \qquad \frac{x}{x'}+\frac{y}{y'}+\frac{z}{z'}=1.$$

Les équations de la normale au point (x', y', z') sont

$$(3) \qquad a^2\left(\frac{x-x'}{x'}\right)=b^2\left(\frac{y-y'}{y'}\right)=c^2\left(\frac{z-z'}{z'}\right).$$

Entre les équations (1), (2) et (3) éliminons x', y', z', nous aurons le lieu cherché.

Des équations (2) et (3) on tire

$$x'=x\left(\frac{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}{\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}\right),$$

$$y'=y\left(\frac{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}}\right), \qquad z'=z\left(\frac{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}}\right);$$

et remplaçant dans l'équation (1) on a

$$\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{1}{\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}\right)^2+\frac{y^2}{b^2}\left(\frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}}\right)^2$$
$$+\frac{z^2}{c^2}\left(\frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}}\right)^2=\left(\frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}\right)^2,$$

équation d'un ellipsoïde concentrique au premier, et dont les axes ont les mêmes directions.

Les calculs se feraient d'une manière semblable pour une surface quelconque du second ordre.

Note. — MM. Frédéric Delafond et G. Mahuet, élèves du lycée de Lyon, L. P., élève du lycée Saint-Louis, sont parvenus aux mêmes résultats par une analyse peu différente de celle qui précède.

La question 624 a été aussi résolue par MM. G. B. (de Florence) et H. de la Phidelne.